Elementos de Astrofísica Teórica

Lineamientos Práctica 6: Reacciones Nucleares

1. La energía liberada será igual a la diferencia de masas entre los núcleos que colisionan y el producto de la colisión, es decir: $\Delta E = \Delta M c^2$. De esta forma, al transformarse 4 protones en 1 núcleo de helio, se libera una energía igual a:

$$\Delta E_{1Col} = (4m_P - m_{\rm He})c^2.$$

Suponiendo que el 70% de la masa del Sol es Hidrógeno, el número de reacciones que habrá para quemar toda su masa de H será:

$$N_{\rm reacc} = \frac{0.7 M_\odot}{4 m_P}.$$

La energía total liberada al quemar toda la masa de H del Sol será la energía de una reacción por el número de reacciones.

La escala de tiempo asociada a esta fuente de energía es $\tau = E_{\rm T}/L_\odot$. Comparar esta escala con el tiempo de vida del Sol.

2. (a) La máxima energía coulombiana se alcanza con la mayor proximidad de los núcleos, es decir, cuando su separación es igual a la suma de los radios individuales:

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_1 + R_2},$$

donde el radio nuclear R está dado por la relación $R \sim A^{1/3} \cdot 1,44 \cdot 10^{-13}$ cm (A; peso atómico).

Para estimar la energía térmica característica de las partículas en el centro de una estrella como el Sol ($T \sim 10^7$ K), consideramos un gas ideal, de manera tal que la energí media por partícula es:

$$E_{\rm th} = \frac{3}{2} kT.$$

Ayuda: El máximo de la barrera dará una energía del orden de MeV (1eV $= 1.6 \times 10^{-12}$ erg; 1 MeV $= 10^6$ eV), mientras que la energía térmica característica será del orden del keV ($= 10^3$ eV).

(b) La fracción de partículas con energía mayor al máximo de la barrera de potencial, V_0, está dada por:

$$\Delta n(E > V_0) = \int_{V_0}^{\infty} n_{\rm MB}(E) dE,$$

donde $n_{\rm MB}(E)$ es la distribución de Maxwell-Boltzmann normalizada en función de la energía:

$$n_{\rm MB}(E) dE = 2\Big(\frac{1}{kT}\Big)^{3/2} \sqrt{\frac{E}{\pi}} e^{-E/kT} dE.$$

Esta integral se puede calcular numéricamente o utilizando la comparación:

$$e^{-x} x^{1/2} < e^{-x} x,$$

válida en el intervalo de integración, donde $x = E/kT$.

3. La probabilidad de penetración T de la barrera de potencial está dada por:

$$T = \frac{4k_3^2/(k_3+k_1)^2}{1+\left[1+\frac{(k_2^2-k_1k_3)^2}{k_2^2(k_1+k_3)^2}\right]\sinh^2(2ak_2)}, \tag{1}$$

donde

$$k_1^2 = \tfrac{2m(E+U_0)}{\hbar^2}, \tag{2}$$
$$k_2^2 = \tfrac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}, \tag{3}$$
$$k_3^2 = \tfrac{2mE}{\hbar^2}. \tag{4}$$

El cálculo completo de la probabilidad de penetración puede verse en el libro de Clayton D., Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis

(a) Las fuerzas fuertes generan un valor $U_0 \sim 30$MeV; por otro lado, ya estimamos $V_0 \sim$ MeV y $E \sim$ keV. De esta forma, $U_0 \gg E$ y $U_0 \gg V_0$, o lo que es equivalente: $k_1 \gg k_2 \gg k_3$. Utilizar esta desigualdad para simplificar la expresión de T.

(b) Utilizando la sugerencia del problema, calculamos $\bar{V}$ en la zona de interés, es decir:

$$\bar{V} = \frac{1}{r_0 - R}\int_R^{r_0} V(r)dr.$$

Luego imponemos la condición:

$$k_2 \cdot (2a) \propto \sqrt{\bar{V}-E}\cdot(2a) := \int_R^{r_0}\sqrt{V(r)-E}\,dr,$$

de donde es posible estimar el valor de a para que el potencial simplificado se corresponda con el potencial real que actúa sobre la partícula incidente.

4. La energía potencial Coulombiana está dada por $E_\mathrm{c} = Z_1Z_2e^2/r_0$ mientras que la energía cinética de los núcleos es $E_\mathrm{k} = p^2/2m$. La idea es utilizar que las cantidades r_0 y p que aparecen en estas energías están relacionadas por el principio de incerteza, $r_0 p \sim \hbar$.

5. Para mostrar esta propiedad matemática hacemos desarrollos de Taylor alrededor de x_0 tanto para $f(x)$ como para $g(x)$; en el caso de $f(x)$ el desarrollo será hasta segundo orden dado que x_0 es un extremo de $f(x)$.

6. La tasa de reacciones nucleares por unidad de volumen y tiempo (r_{jk}) entre partículas j y k puede calcularse mediante la expresión

$$r_{jk} = (1+\delta_{jk})^{-1} n_j n_k < \sigma v >$$

donde n_k y n_j son los números de partículas por unidad de volumen de las especies k y j, respectivamente. De manera que la determinación de las tasas de reacciones nucleares involucra la determinación del factor $< \sigma(v)\cdot v >$. Debido a que la probabilidad de que una reacción ocurra depende de que la barrera coulombiana haya sido previamente atravezada entonces suele escribirse a $\sigma(v)$ dejando explícitamente el factor de penetración de Gamow;

$$\sigma(v(E)) = \frac{S(E)}{E} f_g.$$

Bajo la suposición de que la distribución de velocidades es Maxwelliana, obtenga una expresión para el factor $< \sigma(v) \cdot v >$. Para ello,

(a) Demuestre que $\sigma(v)$ puede escribirse como

$$\sigma(v(E)) = \frac{S(E)}{E} e^{-b/\sqrt{E}}$$

donde $b = 31.28 Z_1 Z_2 A^{1/2} \mathrm{Kev}^{1/2}$, con $A = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}$.
Dado que $v(E)$ es la velocidad relativa entre las partículas, esto se relaciona con la energía cinética $E = 1/2 \mu v^2$, donde μ es la masa reducida del sistema:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} m_u = A m_u.$$

(b) Llevar a la expresión

$$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\mu \pi}} \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty S(E) e^{-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}} dE$$

Para ello calculamos el valor medio según:

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \sigma(E) v(E) \cdot n_{\mathrm{MB}}(E) dE$$

(c) Mostrar que la exponencial en el integrando posee un mínimo bien definido en

$$E_0 = \left(\frac{bkT}{2} \right)^{2/3}.$$

(d) Integrar utilizando el método del ejercicio 5.