Elementos de Astrofísica Teórica

Lineamientos práctica 3: Mecánica de Fluidos

1. Para probar la relación entre las derivadas para las distintas formulaciones, recordar lo siguiente:

   En la formulación euleriana, las variables independientes son $\vec{x}$, es decir, la posición de los elementos de fluido a tiempo t en un sistema de coordenadas no vinculado con el medio, y t, el tiempo. Un dado elemento de fluido puede tener velocidad $\vec{u}(\vec{x}, t) = \frac{d\vec{x}}{dt}$. Recordar que las derivadas temporales y espaciales de la cantidad en esta formulación son tomadas en puntos fijos del espacio.

   En la formulación lagrangiana, los cambios temporales, dados por la cantidad D/Dt son medidos por alguien que se desplaza *junto* al elemento de fluido.

   Utilizar regla de la cadena para vincular ambas derivadas.

2. Para probar esta propiedad, partir de la ecuación de movimiento en la formulación lagrangiana, y multiplicarla por $\vec{u}$. Ver cómo quedaría la derivada material de cada uno de los términos bajo las condiciones del enunciado.

3. Comenzamos escribiendo la ecuación de movimiento en coordenadas esféricas:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{dP}{dr} - \rho \frac{d\phi}{dr},$$

   donde $d\phi/dr = Gm(r)/r^2$. Queremos hallar una ecuación para dv/dr; necesitamos escribir las variables P y ρ en función de la incógnita. Para eso sumamos una ecuación de estado, que supondremos la de un gas ideal monoatómico. Y por otro lado, utilizaremos el hecho de que la solución es estacionaria de la siguiente manera: como no puede existir una dependencia explícita con el tiempo, entonces la masa que atraviesa una dada superficie de radio r por unidad de tiempo debe ser constante para todo r, es decir:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\rho 4\pi r^2 dr}{dt} = \text{ cte } \forall r.$$

   Por lo tanto, si derivamos esta relación con respecto a r, obtendremos la ecuación extra que estaba faltando para resolver el sistema.

   Para obtener la solución crítica utilizar separación de variables, calculando los valores de $r_{\rm c}$ y $v(r_{\rm c})$ que salen de anular tanto el numerador como el denominador.

4. Este ejercicio lo resuelven en las clases teóricas. Ver también los apuntes de la materia en la página.

5. Idem anterior.

6. a) Escribimos de manera aproximada los términos de aceleración gravitatoria y la presión del gas que aparecen en la ecuación de movimiento:

$$F_g = \rho \frac{d\phi}{dr} = \rho \frac{Gm(r)}{r^2} \sim \frac{4\pi R^3}{3} \frac{GM}{R^2} \propto M/R^5,$$

$$F_P = \frac{dP}{dr} = \frac{\bar{P}}{R} \sim \frac{\rho \Re T}{\mu} \frac{1}{R} \propto MT/R^4.$$

   Asi, el cociente resulta $F_g/F_P \sim M/(RT)$, de manera que durante un colapso gravitatorio el término de la presión puede despreciarse en la ecuación de movimiento del fluido, mientras el gas permanezca isotérmico. Discutir la validéz de esta hipótesis.

b) Una vez que despreciamos el término de la presión en la ecuación de movimiento, la misma puede escribirse según:

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = -\frac{Gm(r)}{r^2}.$$

Multiplicando por $\dot{r}$, cada término puede reescribirse según:

$$\begin{aligned} \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dt} &= \tfrac{1}{2}\tfrac{d\dot{r}^2}{dt}, \\ \frac{\dot{r}}{r^2} &= -\tfrac{d(1/r)}{dt}. \end{aligned}$$

Luego podemos integrar llegando a:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{4\pi {r_0}^3}{3r} G\rho_0 + \text{cte}.$$

La cte de integración se obtiene a partir de la condición inicial $\dot{r}(t = 0) = \dot{r}(r = r_0) = 0$, donde $r_0 = r(t = 0)$. Luego aplique el cambio de variables sugerido: $\cos^2\zeta = \frac{r}{r_0}$.

c) Para poder hallar la escala de tiempo para que la nube colapse completamente, debo pedir que se cumpla $r_{\text{final}} = 0$. Trasladar esa condición a la variable ζ y hallar el tiempo de colapso.