Elementos de Astrofísica Teórica

Lineamientos práctica 2: Gravitación

1. Consideremos una cáscara esférica de densidad superficial constante σ y radio R. Dado que el sistema tiene simetría esférica, la densidad y, consecuentemente, el potencial y campo gravitatorio generado dependerán unicamente del módulo del vector $\vec{r}$, es decir, $\rho(\vec{r}) \to \rho(r)$, $\phi(\vec{r}) \to \phi(r)$ y $\vec{g}(\vec{r}) \to \vec{g}(r)$. A su vez, el campo $\vec{g}$ tendrá solamente componente radial no nula. Dada la simetría del problema, usaremos coordenadas esféricas, en las que el potencial puede obtenerse a partir de:

$$\phi(r) = -G \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' r'^2 \sin(\theta') \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r'}|}. \tag{1}$$

Para escribir el término $|\vec{r} - \vec{r'}|$ en coordenadas esféricas, utilizamos el teorema del coseno en el triángulo que se muestra en la Fig. 1:

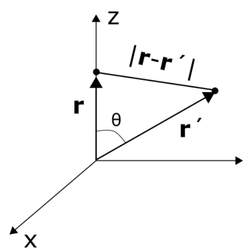

Figure 1: Calculamos la distancia: $(\vec{r} - \vec{r'})^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta')$.

Reemplazamos esta expresión en la Eq. 1, e integramos sobre las variables angulares, obteniendo:

$$\phi(r) = -2\pi G \int_0^\infty dr' \frac{r'}{r} \left| \left[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta') \right]^{1/2} \right|_0^{2\pi}. \tag{2}$$

Recordar que los términos $(r^2 + r'^2 \pm 2rr')^{1/2} = \left| r^2 \pm r'^2 \right|$, por lo que para calcularlos se dede tener en cuenta si se evalua el potencial dentro de la distribución, $r < R$, o fuera, $r > R$.

El procedimiento hasta aquí ha sido independiente de la forma de la función $\rho(r)$, solamente utilizamos la simetría esférica del problema. A partir de la ecuación anterior, se puede obtener la expresión para calcular el potencial gravitatorio para cualquier problema con simetría esférica, dada por:

$$\phi(r) = -4\pi G \left[\frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \right]. \tag{3}$$

En el caso del cascarón esférico, se puede escribir la densidad de masa utilizando la función delta de Dirac:

$$\rho(r) = \sigma \delta(r - R), \tag{4}$$

que implica que la densidad vale σ sobre la superficie de radio R, y es nula para todo otro r. Para realizar la integral en la coordenada radial, recordamos la propiedad:

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x_0 \in (a, b), \\ 0 & \text{si } x_0 \notin (a, b). \end{cases} \tag{5}$$

El resultado al que se debería llegar es el siguiente:

$$\phi(r) = \begin{cases} -\frac{GM}{R} & \text{si } r < R, \\ -\frac{GM}{r} & \text{si } r > R, \end{cases} \tag{6}$$

donde $M = 4\pi\sigma R^2$. Por último, el campo gravitatorio lo calculamos a partir de $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$.

2. Consideramos una distribución bidimensional de masa que ocupa el plano $z = 0$ con densidad superficial constante σ (ver Fig. 2). Este problema tiene simetría de tranlación sobre el plano (x, y) y de rotación alrededor del eje z, por lo que la densidad, el potencial y el campo sólo serán funciones de la coordenada z, y no dependerán de las coordenadas (x, y). Teniendo en cuenta esto, y escribiendo el Laplaciano en coordenadas cartesianas, la ecuación a resolver resulta:

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = 4\pi G\rho(z). \tag{7}$$

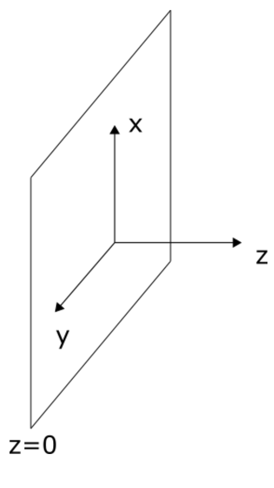

Figure 2: En el plano definido por $z = 0$ la densidad es igual a σ.

La densidad de masa se puede escribir de manera análoga a como escribimos la del cascarón, en este caso siendo $\rho(z) = \sigma\delta(z)$. Luego integramos la Ec. de Poisson entre $-z$ y z y obtenemos:

$$\frac{d\phi}{dz}(z) - \frac{d\phi}{dz}(-z) = 4\pi G\sigma. \tag{8}$$

Para calcular el miembro izquierdo, utilizamos la relación de simetría del problema $\phi(z) = \phi(-z)$, dado que el potencial sólo depende de la distancia al plano. Derivando esta relación, vemos que $d\phi(z)/dz = -d\phi(-z)/dz$. Luego integramos una vez mas entre $z = 0$ y un z arbitrario, y, utilizando la condición de contorno $\phi(z = 0) = 0$, obtenemos:

$$\phi(z) = 2\pi G\sigma z. \tag{9}$$

El campo graviatorio se calcula nuevamente utilizando $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$, y en este caso vemos que resulta constante.

3. Calculamos el potencial generado por esa distribución de densidad utilizando la Eq. 3.

4. (a) La energía potencial gravitatoria está dada por:

$$W = -\frac{G}{2}\int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r'})\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}. \tag{10}$$

Dentro de esta expresión podemos identificar al potencial gravitatorio y reescribir:

$$W = \frac{1}{2}\int d^3r \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}). \tag{11}$$

Utilizando la ecuación de Poisson, la densidad de masa se puede expresar según $\rho(\vec{r}) = \vec{\nabla}^2\phi/4\pi G$, por lo que la energía potencial gravitatoria resulta

$$W = \frac{1}{8\pi G}\int d^3r \vec{\nabla}^2\phi(\vec{r})\phi(\vec{r}). \tag{12}$$

Para reescribir esta integral usaremos la siguiente identidad vectorial: sean $\vec{f}$ y g dos campos vectoriales y escalares, respectivamente. Se puede ver que se satisface:

$$\vec{\nabla}\cdot(g\vec{f}) = g\vec{\nabla}\cdot\vec{f} + (\vec{f}\cdot\vec{\nabla})g. \tag{13}$$

En nuestro caso, identificamos al campo escalar g con el potencial gravitatorio ϕ, y al campo vectorial $\vec{f}$ con $\vec{\nabla}\phi$. Cuando hagamos este reemplazo, quedará un término que será una integral de volumen de una divergencia:

$$\int d^3r \vec{\nabla}(\phi\vec{\nabla}\phi), \tag{14}$$

Se puede probar que esta integral es nula utilizando el Teorema de Green de la divergencia. Ayuda: utilizar las dependencias de ϕ, $\vec{\nabla}\phi$ y de un área esférica con r para mostrar que la integral de superficie tiende a cero cuando $r \to \infty$.
De esta forma probamos que la energía gravitatoria puede reescribirse como

$$W = -\frac{1}{8\pi G}\int |\vec{\nabla}\phi|^2 d^3r, \tag{15}$$

lo que permite pensar a la energía de ligadura gravitatoria como la energía necesaria para construir ese campo gravitatorio ϕ.

(b) Para un sistema con simetría esférica y extensión infinita las siguientes expresiones son equivalentes

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{M_\mathrm{T}} \phi(r)dm(r) = -G\int_0^{M_\mathrm{T}} \frac{m(r)}{r}dm(r) = -\frac{G}{2}\int_0^{\infty} \frac{m^2(r)}{r^2}dr. \tag{16}$$

Para poder probar que estas relaciones son equivalentes, hay que partir de la Eq. 11, pasarla a coordenadas esféricas y utilizar la relación $dm(r) = 4\pi r^2\rho(r)dr$ e integrar por partes. Justificar por qué algunos términos de la integración por partes se hacen nulos.

(c) Utilizar alguna de las últimas expresiones para estimar de manera muy aproximada (e.g., suponiendo una densidad constante) la energía de ligadura gravitatoria del Sol; se obtiene un valor del orden de $W_\odot \sim 10^{48}$ erg. Para deducir una escala de tiempo asociada, tenemos que considerar a qué velocidad el Sol quema su energía disponible, es decir la potencia. Suponiendo que la luminosidad del Sol se mantuvo constante durante toda su vida, e igual al valor actual, el Sol quemaría toda su energía potencial gravitatoria en un tiempo τ dado por:

$$\tau = \frac{W_\odot}{L_\odot} \sim 10^7 \text{yr}. \tag{17}$$

La edad del Sol es de unos 5×10^9 yr, por lo que esta fuente de energía no alcanza para explicar la luminosidad solar durante toda su vida.

5. Partimos de algunas de las expresiones válidas para sistemas con simetría esféricas que vimos en el ejercicio anterior. En particular,

$$W = -\frac{G}{2}\int_0^\infty \frac{M^2(r)}{r^2}dr = -\frac{G}{2}\int_0^R \frac{M^2(r)}{r^2}dr. \tag{18}$$

Mediante el cambio de variables $\xi = r/R$, podemos reescribir:

$$W = -\frac{G}{2R}\int_0^1 \frac{M^2(\xi R)}{\xi^2}d\xi. \tag{19}$$

Por otro lado, tenemos que $M(r) = 4\pi \int_0^r x^2\rho(x)dx = 4\pi Z(r)$, donde $Z(r) > 0$ y $Z'(r) > 0$. De esta forma se puede ver que:

$$\frac{M(r)}{M_\mathrm{T}} = \frac{Z(r)}{Z}(R) < 1 \Rightarrow M(\xi R) = M_\mathrm{T} f(\xi), \tag{20}$$

donde se cumple que $0 < f(\xi) < 1$. Sustituyendo esta relación en la Eq. 19, obtenemos:

$$W = -\frac{GM_\mathrm{T}^2}{R}\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{f^2(\xi)}{\xi^2}d\xi. \tag{21}$$

Si $f^2(\xi)/\xi^2$ es continua en $(0,1)$, entonces por el teorema del valor medio del cálculo integral, existe un $\xi^\star \in (0,1)$ tal que:

$$\int_0^1 \frac{f^2(\xi)}{\xi^2}d\xi = \frac{f^2(\xi^\star)}{(\xi^\star)^2} > 0. \tag{22}$$

De esta forma, se prueba que

$$W = -\alpha\frac{GM_\mathrm{T}^2}{R}. \tag{23}$$

Pensar cómo debe decaer el perfil de densidad $\rho(r)$ para que las hipótesis sean válidas.