Elementos de Astrofísica Teórica

Práctica 3: Mecánica de Fluidos

1. Considere una cantidad $Q(\vec{r}, t)$ (que puede ser un campo escalar o componentes de un campo vectorial) y demuestre que la derivada temporal de esta cantidad observada por alguien que se mueve junto con el fluido (“D/Dt”, derivada lagrangiana) se relaciona con las derivadas temporales y espaciales de la cantidad tomadas en puntos fijos del espacio (derivadas eulerianas) es:

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} Q$$

2. Demostrar que en un fluido incompresible, se verifica que:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2 + P + \rho\phi\right) = 0,$$

si el potencial ϕ es estático y $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$.

3. Mostrar que para un viento estelar estacionario, esféricamente simétrico e isotérmico, la ecuación de movimiento puede escribirse como

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dr} = \Big(\frac{2a^2}{r} - \frac{GM_\star}{r^2}\Big)/(v^2 - a^2),$$

donde $a = (\Re T/\mu)^{1/2}$ es la velocidad isotérmica del sonido. Notar que en el punto donde el numerador se anula dv/dr debe cambiar de signo a menos que también se anule el denominador. Aquella solución en la cual denominador y numerador se anulan simultáneamente se denomina solución crítica.

Demostrar que la solución crítica es de la forma

$$v \exp\Big(-\frac{v^2}{2a^2}\Big) = a\Big(\frac{r_\mathrm{c}}{r}\Big)^2 \exp\Big(-\frac{2r_\mathrm{c}}{r} + \frac{3}{2}\Big),$$

donde $r_\mathrm{c} = GM_\star/(2a^2)$ y $v(r_\mathrm{c}) = a$, como corresponde a la solución crítica.

4. Mostrar que en un fluido barotrópico, homogéneo y estático, si se genera una perturbación, la perturbación en la densidad satisface una ecuación de onda con velocidad $c_s = \sqrt{dP/d\rho}$. Mostrar que la perturbación en la presión también es una onda que se propaga con velocidad c_s (suponer $\phi = cte$).

5. Inestabilidad de Jeans. Considerese ahora un fluido barotrópico, estático y autogravitante en el cual la densidad ρ_0 varía muy suavemente (en comparacion con las variaciones de las perturbaciones en la densidad).

   a) Mostrar que en estos casos la solución a la ecuación de onda de la perturbación ρ_1 cumple la “relación de dispersión”

   $$\omega(\vec{k})^2 = {c_s}^2 k^2 - 4\pi G\rho_0.$$

   Sugerencia: Encuentre las ecuaciones para ρ_1 y proponga una solución $\rho_1 = ce^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$.

   b) Mostrar que esto define un número de onda crítico

   $${K_J}^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{{c_s}^2},$$

   por debajo de la cual ρ_1 tiene un comportamiento exponencial. Interpretar fisicamente.

c) Mostrar que esa longitud de onda esta asociada una masa crítica dada por:

$$M \sim \frac{4\pi}{3}\rho_0 \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 .$$

d) Dado que sabemos que las estrellas se forman del colapso de nubes de gas interestelar de H neutro a densidades y temperaturas de $\rho \sim 10^{-24}$ [g/cm^3] y $T \sim 100$K. Calcular la masa crítica asociada y compare con las masas estelares. ¿Qué puede decir?

6. a) Muestre que durante el colapso de una nube interestelar el cociente entre la aceleración gravitatoria y la presión del gas cambia como $F_g/F_P \sim M/(RT)$. De manera que mientras el gas permanezca isotérmico[1] el término de la presión puede despreciarse en la ecuación de movimiento del fluido.

b) Bajo esta aproximación resolver la evolución de los elementos de fluido $r(t)$ durante el colapso de una nube esfericamente simétrica.

Sugerencia: Tome la ecuación de movimiento del fluido y muestre que vale

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{4\pi {r_0}^3}{3r} G\rho_0 + \text{cte},$$

y luego aplique el cambio de variables $\cos^2\zeta = \frac{r}{r_0}$.

c) Muestre que la escala de tiempo para que la nube colapse completamente ($r_{\text{final}} = 0$) es igual para todas las cáscaras de la configuración original e igual a

$$\tau_{\text{ff}} = \left(\frac{3\pi}{32 G\rho_0}\right)^{1/2} .$$

d) Calcule la escala de tiempo necesaria para el colapso de una nube de gas molecular considerando que la densidad inicial es $\rho_0 \sim 4 \times 10^{-23}$ [g/cm^3].

References

[1] Binney, J. y Tremaine, S., Stellar Dynamics.

[2] Clarke, C. y Carswell, R., Astrophysical Fluid Dynamics.

[3] Kippenhahn R. y Weigert A., Stellar Structure and Evolution.

[1] Lo que ocurrirá mientras las densidades sean suficientemente bajas como para que la energía liberada durante el colapso gravitatorio escapen libremente de la nube.