Elementos de Astrofísica Teórica

Práctica 2: Gravitación

1. Calcular el potencial y el campo en el interior y exterior de una cáscara esférica de densidad superficial constante σ.

2. a) Utilizando la ecuación de Poisson, calcular el potencial generado por una distribución bidimensional de masa que ocupa el plano $z = 0$ con densidad superficial constante σ, tomando como origen del potencial el plano $z = 0$.

   b) ¿Qué ocurre si se intenta utilizar la expresión integral del potencial?

3. Mostrar que el potencial generado por la distribución de densidad

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi b^3}\left[1 + \left(\frac{r}{b}\right)^2\right]^{-5/2}$$

es

$$\phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}}.$$

4. A partir de la expresión de la energía potencial gravitatoria mostrar que:

   (a) La energía gravitatoria puede reescribirse como

$$W = -\frac{1}{8\pi G}\int |\vec{\nabla}\phi|^2 d^3x,$$

   lo que permite pensar a la energía de ligadura gravitatoria como la energía necesaria para construir ese campo gravitatorio ϕ.

   (b) Para un sistema con simetría esférica y extensión infinita las siguientes expresiones son equivalentes

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{M_\mathrm{T}} \phi(r)dM(r) = -G\int_0^{M_\mathrm{T}} \frac{M(r)}{r}dM(r) = -\frac{G}{2}\int_0^{\infty} \frac{M^2(r)}{r^2}dr. \quad (1)$$

   (c) Utilizar alguna de las últimas expresiones para estimar la energía de ligadura gravitatoria del sol y, utilizando la potencia liberada por el sol, deducir una escala de tiempo asociada. ¿Qué puede decir de esto?

5. Mostrar que para un sistema esférico de radio R finito, la energía potencial gravitatoria se puede escribir como:

$$W = -\alpha\frac{GM^2}{R},$$

donde $\alpha > 0$ es una constante numérica que sólo depende de la forma funcional de ρ con r.

References

[1] Binney, J. y Tremaine, S., Stellar Dynamics.

[2] Clarke, C. y Carswell, R., Astrophysical Fluid Dynamics.

[3] Kippenhahn R. y Weigert A., Stellar Structure and Evolution.