

Revisión de la Termodinámica

1. Relación fundamental de un sistema termodinámico

Las siguientes ecuaciones pretenden ser ecuaciones fundamentales de distintos sistemas termodinámicos. Analice cuáles de ellas son físicamente aceptables (esto es, si son consistentes con los postulados termodinámicos). En los casos en que lo sean, encuentre U como función de S , V y N . Las cantidades v_0 , θ , y R son constantes positivas; en los casos de exponentes fraccionarios tomar solo las raíces positivas.

$$1. S = \left(\frac{R^2}{v_0 \theta} \right)^{1/3} (NVU)^{1/3}$$

$$2. S = \frac{R^2 \theta}{v_0^3} \frac{V^3}{NU}$$

$$3. S = \left(\frac{R^3}{v_0 \theta^2} \right)^{1/5} (VN^2U^2)$$

$$4. U = \left(\frac{v_0 \theta}{R} \right)^{1/2} \frac{S^2}{V} \exp \left(\frac{S}{NR} \right)$$

2. Ecuaciones de estado del gas ideal clásico

Para un gas ideal monoatómico, la entropía está dada en función de sus variables extensivas energía U , volumen V , y número de moles N , por la expresión:

$$S(U, V, N) = N \left(\text{cte} + R \ln \left(\frac{U^{3/2} V}{N^{5/2}} \right) \right)$$

1. Analizar si es una relación fundamental físicamente aceptable. En caso de no serlo, determinar el rango de validez.
2. Determinar las ecuaciones de estado en la representación entrópica.
3. Encuentre la relación fundamental en la representación energética $U(S, V, N)$.
4. Encuentre las tres ecuaciones de estado en la representación energética.

3. Distribución de Maxwell-Boltzmann

A partir de la distribución de Maxwell-Boltzmann dada por

$$\ln(F(\vec{v})) = -A|\vec{v}|^2 + \ln B$$

y la definición de la energía interna específica

$$\epsilon = \frac{1}{2} \int d^3v F(\vec{v}) |\vec{v}|^2$$

1. Mostrar que las constantes A y B son

$$A = \frac{3}{4\epsilon} \quad B = \left(\frac{3}{4\pi\epsilon} \right)^{3/2}$$

2. Mostrar que para un gas monoatómico clásico la función de distribución de Maxwell-Boltzmann es

$$F(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi\kappa_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m|\vec{v}|^2}{2\kappa_B T} \right)$$

donde κ_B es la constante de Boltzmann, y T la temperatura del gas.

3. A partir de la función de distribución derivada en el inciso anterior, muestre que la rapidez media de las partículas está dada por

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8\kappa_B T}{\pi m}}$$

y la rapidez más probable

$$v_p = \sqrt{\frac{2\kappa_B T}{m}}$$

¿por qué se obtienen distintos resultados para $\langle v \rangle$ y v_p ?

4. Mostrar que la función de distribución de módulos de momento, $p = mv$, está dada por:

$$f(p) = 4\pi p^2 \left(\frac{1}{2\pi m \kappa_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{p^2}{2m \kappa_B T} \right)$$

4. Ecuación de estado del gas ideal no-relativista y relativista

Alternativamente a la función de distribución de Maxwell-Boltzmann vista en el ejercicio anterior, se puede definir la función de distribución $n(p) = n f(p)$ para la cual

$$n = \int_0^\infty n(p) dp$$

donde n es la densidad numérica del gas. La densidad de energía en términos de la distribución $n(p)$ está dada por

$$u = \int_0^\infty n(p) \epsilon(p) dp$$

donde $\epsilon(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ es la energía cinética de una partícula, y $v = \frac{\partial \epsilon}{\partial p}$ su velocidad.

1. Muestre que la presión térmica de un gas ideal está dada por

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty n(p) p v dp$$

2. Mostrar que para un gas ideal clásico no relativista la integral anterior se reduce al valor conocido

$$P = n \kappa_B T$$

3. Muestre que, independientemente del tipo de partículas que componen un gas, la relación entre la energía interna U y la presión solo depende del estado cinético de las partículas y vale

$$u = \frac{U}{V} = \frac{3P}{2}, \quad \text{si las partículas son no relativistas}$$

$$u = \frac{U}{V} = 3P, \quad \text{si las partículas son relativistas}$$

5. Procesos politrópicos en un gas ideal clásico

Se denomina *proceso politrópico* a toda trayectoria en el espacio termodinámico en la cual el sistema físico verifica que el calor específico varía de forma definida durante todo el proceso:

$$c = \frac{dq}{dT}$$

donde c es la función calor específico, dq es la cantidad de energía suministrada/extraída del sistema, y dT es el cambio de temperatura.

- (a) ¿Cuál es el valor del calor específico en un proceso adiabático? ¿Y en un proceso isotérmico?
- (b) A partir de la primera ley de la termodinámica, mostrar que la ecuación de un proceso politrópico está dada por

$$T \rho^{\frac{c_p - c_v}{c - c_v}} = \text{cte}$$

- (c) Se define el exponente politrópico como:

$$\Gamma = \frac{c_p - c}{c_v - c}$$

A partir de lo obtenido en el inciso anterior, mostrar las siguientes relaciones

$$\frac{d \ln P}{d \ln \rho} = \Gamma, \quad \frac{d \ln P}{d \ln T} = \frac{\Gamma}{\Gamma - 1}, \quad \frac{d \ln T}{d \ln \rho} = \Gamma - 1$$

6. Mezcla de gases ideales

- (a) Calcular el peso molecular medio de un gas ideal compuesto por Hidrógeno ionizado con 10% de Helio una vez ionizado, es decir $n_{\text{HeII}}/n_{\text{HII}} = 0.1$ ¿Cuál es el peso molecular medio si el Helio está dos veces ionizado?
- (b) Una nebulosa planetaria compuesta de Hidrógeno y Helio ambos una vez ionizados, con 10% de HeII, tiene una temperatura de $T_e = 10^4$ K y una densidad electrónica $n_e = 10^4 \text{ cm}^{-3}$.
- ¿Cuál es la presión media en la nebulosa?
 - Suponiendo que la nebulosa se expande a una velocidad de 20 km s^{-1} , ¿cuál es el flujo de masa al medio interestelar?
 - Considerando que la nebulosa tiene un diámetro angular de 1 arcmin y está ubicada a 2 kpc del sol, determinar su edad suponiendo que es igual al tiempo de expansión

7. Mezcla de un gas ideal y radiación de cuerpo negro

- (a) Considerando que la energía y la presión para la radiación de cuerpo negro a temperatura T dentro de un volumen V están dadas por:

$$U = aT^4V \quad P = \frac{1}{3}aT^4,$$

donde $a = 4\sigma/c$ es la constante de radiación, σ la constante de Stefan-Boltzmann, y c la rapidez de la luz. Mostrar que la entropía de la radiación de cuerpo negro está dada por

$$S = \frac{4}{3}aT^3V$$

Sugerencia: Plantear la primera ley de la termodinámica y recordar que $S(T, V)$ es un diferencial exacto.

- (b) Si tanto los iones como los electrones que componen el plasma estelar se encuentran no degenerados y son no relativistas, el material puede considerarse una mezcla de un gas ideal clásico (iones y electrones) y un gas de fotones.
- Escriba las expresiones para la presión total del gas y para la energía interna total por unidad de masa.
 - Usando las expresiones obtenidas en el inciso anterior, derive los valores de c_p y c_v (calores específicos por unidad de masa) para la mezcla de gas ideal clásico y fotones y muestre que

$$c_v = \frac{3\kappa_B}{2\mu m_H} \frac{8 - 7\beta}{\beta}$$

$$c_p = \frac{3\kappa_B}{2\mu m_H} \frac{32/3 - 8\beta - \beta^2}{\beta^2}$$

donde β está definido como el cociente entre la presión del gas y la presión total

$$\beta = \frac{P_g}{P_g + P_r}$$

Analice el efecto de la radiación sobre los calores específicos del plasma.

- iii. Calcular los exponentes de Chandrasekhar para este sistema y demostrar las ecuaciones de estado:

$$PV^{\Gamma_1} = \text{cte}, \quad PT^{\frac{\Gamma_2}{1-\Gamma_2}} = \text{cte}, \quad TV^{\Gamma_3-1} = \text{cte}$$

8. Descripción estadística cuántica de sistemas de partículas

Considere un sistema macroscópico de N partículas en el cual cada partícula puede estar en alguno de M niveles de energía posibles $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ los cuales están degenerados un número g_i ($g_i \gg 1$). A cada momento podemos decir que habrá un número n_i de partículas en cada nivel de energía ϵ_i , los cuales cambiarán constantemente debido a las colisiones y transiciones que ocurren a nivel microscópico entre las diferentes partículas. Si el sistema está aislado del exterior y las partículas no se destruyen, sabemos que debe cumplirse

$$N = \sum_{i=1}^M n_i, \quad U = \sum_{i=1}^M n_i \epsilon_i$$

En este problema vamos a calcular el número N_p de formas posibles de obtener una distribución $\{n_i\}_{i=1,\dots,M}$ con valores genéricos n_i . Suponiendo que las cantidades n_i son continuas, se calcula el máximo de N_p utilizando el método de multiplicadores de Lagrange (α, β) para incorporar las restricciones dadas por las ecuaciones.

- (a) Bajo la suposición de que cada partícula posee la misma probabilidad intrínseca de ocupar cada uno de los estados microscópicos, demostrar que la distribución de números de ocupación $\{n_i^*\}_{i=1,\dots,M}$ más probable para el caso de partículas distinguibles está dada por:

$$n_i^* = g_i \exp(-\alpha - \beta \epsilon_i)$$

- (b) Para el caso de partículas indistinguibles sin restricciones en el número de ocupación de cada estado microscópico (es decir, bosones)

$$n_i^* = g_i \frac{1}{\exp(\alpha + \beta \epsilon_i) - 1}$$

- (c) Finalmente, para el caso de partículas indistinguibles cuando no puede haber más de una en cada estado microscópico disponible (fermiones)

$$n_i^* = g_i \frac{1}{\exp(\alpha + \beta \epsilon_i) + 1}$$

Nota: Es posible demostrar, que cuando $N \rightarrow \infty$, los valores de n_i^* de la distribución más probable recién calculada coinciden con los valores medios de ocupación $\langle n_i \rangle$ de dichos estados, cuyos valores determinarán las cantidades medidas macroscópicamente.

9. (Opcional) Termodinámica de agujeros negros

A medida que un agujero negro engulle el gas circundante, su masa, tamaño, rotación, y carga eléctrica pueden cambiar. En el caso de un agujero negro no rotante y descargado se verifica:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi G} dA,$$

donde M es la masa del agujero negro, $\kappa = c^4/4GM$ es su gravedad superficial en el horizonte de eventos, A es el área de la superficie del horizonte de eventos, y G la constante de gravitación universal.

Esta ecuación puede ser interpretada como la primera ley de la termodinámica para este tipo de agujeros negros, o como la ecuación fundamental en la representación energética. Para esto, definimos Mc^2 como la energía interna total del agujero negro. Por otro lado, adoptando la fórmula de Bekenstein-Hawking para la entropía de un agujero negro

$$S = \frac{k_B A c^3}{4G\hbar},$$

donde $\hbar = h/2\pi$, la constante de Planck reducida.

- (a) Mostrar que a partir de las definiciones anteriores, la temperatura de un agujero negro está dada por:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M}$$

- (b) Si al agujero negro se le suministra energía en forma de calor dQ cambiará su masa en $c^2 dM$. Mostrar que el calor específico es negativo y está dado por:

$$C = \frac{1}{M} \frac{dQ}{dT} = -\frac{8\pi\kappa_B GM}{\hbar c}$$

esto indica que al ganar energía la temperatura de los agujeros negros decrece. Inversamente, agujeros negros que pierden energía al radiar, incrementan su temperatura.

Referencias

- [1] Marcelo Alonso y Edward J. Finn. *Fundamental university physics. Vol.3: Quantum and statistical physics*. 1968.
- [2] Hale Bradt. *Astrophysics Processes*. 2008.
- [3] Herbert B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics, 2nd Edition*. 1985.
- [4] Arnab Rai Choudhuri. *The physics of fluids and plasmas : an introduction for astrophysicists*. 1998.
- [5] Pablo M. Cincotta. *Notas de Elementos de Astrofísica Teórica*. 2022.
- [6] Donald D. Clayton. *Principles of stellar evolution and nucleosynthesis*. 1983.
- [7] W. J. Maciel. *Hydrodynamics and Stellar Winds: An Introduction*. 2014.