Elementos de Astrofísica Teórica

Lineamientos práctica 4: Estructuras en equilibrio hidrostático y enanas blancas

1. Utilizando la ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r)\frac{Gm(r)}{r^2},$$

podemos considerar, a orden cero, una densidad uniforme para la estructura del Sol, y obtenemos un valor medio para la presión:

$$\frac{\bar{P}}{R} \sim \rho_{\mathrm{c}}\frac{GM}{R^2},$$

donde

$$\rho_{\mathrm{c}} = \frac{M}{4/3\pi R^3}.$$

El valor para la temperatura típica del interior del Sol se puede obtener considerando que el gas que lo compone se comporta como un gas ideal clásico.

2. En este caso, a diferencia del ejercicio anterior, tenemos un modelo estelar dado por el perfil de la densidad $\rho(r)$. De esta forma, el perfil de masa se puede obtener a partir de:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr, \tag{1}$$

mientras que el perfil de la presión se puede obtener a partir de integrar la ecuación de equilibrio hidrostático. Sugerencia: integre la ecuación entre un radio r arbitrario y el radio de la estrella R, para poder utilizar la condición de contorno $P(R) = 0$.

El perfil de temperatura, $T(r)$, se obtiene suponiendo que el gas es un gas ideal clásico. Para poder verificar que $T(R) = 0$, deberá probar que:

$$\lim_{r \to R} T(r) = 0.$$

Por último, para estimar la energía potencial podrá utilizar algunas de las expresiones que vimos en la práctica 2, válidas para simetría esférica.

3. Ecuación de Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) + \theta^n = 0.$$

para $n = 0$ y $n = 1$ bajo las condiciones de contorno $\theta(0) = 1$ y $\frac{d\theta}{d\xi}|_0 = 0$ (justificar esta última condición). La densidad ρ, el radio r y la presión P están vinculados a θ y ξ por: $r = \alpha\xi,\ \rho = \lambda\theta^n,\ P = K\rho^{1+1/n}$ donde λ y K son constantes y

$$\alpha^2 = \frac{K(n+1)\lambda^{-1+1/n}}{4\pi G}.$$

a) En el caso $n = 0$, la ecuación diferencial que se obtiene es sencilla y puede integrarse utilizando las condiciones de contorno. La solución a la que debería llegarse es:

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6}.$$

¿Qué representa la polítropa de índice $n = 0$?

b) En el caso $n = 1$, el truco está en poder reescribir el primer término de la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = \frac{1}{\xi}\frac{d^2}{d\xi^2}(\xi\theta),$$

y luego proponer el cambio $\chi = \xi\theta$, lo que resultará en la ecuación del oscilador armónico. La solución a la que debería llegarse es:

$$\theta(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\xi}.$$

c) Demostrar que $\theta(\xi) = (1 + \xi^2/3)^{-1/2}$ es solución de una ecuación de Lane-Emden. ¿De qué valor de n?

d) Utilizar las ecuaciones de estado de un gas ideal y de un gas de radiación, recordando además que si $P_{\text{gas}} = \beta P$, entonces se puede escribir $P_{\text{rad}} = (1 - \beta)P$. Con estas dos ecuaciones obtener la relación entre la presión y la densidad.

4. *a*) La masa de la estructura puede obtenerse a partir de la Eq. 1, integrando hasta el radio R de la estrella. En este caso nos interesa utilizar las variables politrópicas, por lo que hacemos las sustituciones: $r = \alpha\xi$ y $\rho = \lambda\theta^n$. El término θ^n puede despejarse de la ecuación de Lane-Emden, para que la integral pueda realizarse de manera directa.

b) Para obtener el valor de la presión central de la polítropa, construya el cociente M^2/R^4 utilizando el inciso anterior. Dentro de esta expresión podrá encontrar la P_{c}, considerando que:

$$P_{\text{c}} = P(r = 0) = K(\lambda\theta(\xi = 0)^n)^{1+1/n} = K\lambda^{1+1/n}.$$

c) Para calcular la energía potencia usamos alguna de las expresiones de la práctica 2. En particular:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^R \phi(r)dm(r). \tag{2}$$

La expresión de $\phi(r)$ la obtenemos utilizando la ecuacion de equilibrio hidrostático, de manera que

$$d\phi = -\frac{1}{\rho}dP,$$

y sabemos que P y ρ están relacionadas mediante una ecuación de estado politrópica. Realizando todas las sustituciones e integrales (entre r y R), se llega a:

$$\phi(r) = -(n+1)\frac{P}{\rho} - \frac{GM}{R},$$

donde usamos que $\phi(R) = GM/R$ (probarlo).

Al sustituir $\phi(r)$ en la Eq. 2, en algún punto del desarrollo se llegará a un término de la forma:

$$\int_0^R P4\pi r^2 dr.$$

Se puede probar que esta integral es igual a $-W/3$. Para esto utilizamos:

$$W = -G\int_0^R \frac{m(r)}{r} dm(r). \tag{3}$$

Integramos por parte esta expresión usando que, por la ecuación de equilibrio hidrostático con m como variable, se tiene:

$$\frac{m(r)}{r} = \frac{dP}{dm} 4\pi r^2.$$

5. Utilizando el teorema del Virial, analizar cómo es el cambio de las $E_{\rm interna}$ y $E_{\rm gravitatoria}$ ante una contracción, $\Delta r < 0$.

Propiedades Mecánicas y Térmicas de las Enanas Blancas

6. **Validez de la hipótesis de gas de electrones completamente degenerado ("T=0")**

   a) Primero calculamos la densidad de masa media, $\rho_{\rm EB}$, de la enana blanca, utilizando su masa y radio. Luego, estimamos la densidad de iones según:

   $$n_i = \frac{\rho_{\rm EB}}{m^{C^{12}}},$$

   donde $m^{C^{12}}$ es la masa del C^{12}. Por cada núcleo de carbono, hay 6 electrones, por lo que la densidad de electrones resulta: $n_e = 6n_i$.

   b) La distribución de Fermi-Dirac para un gas de electrones, como vimos en la práctica 1, está dada por:

   $$n(p)dp = \frac{8\pi p^2}{h^3} f(p)dp, \ \mathrm{con} f(p) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\epsilon_{\rm F})/kT} + 1}.$$

   En el límite de gas de electrones completamente degenerado ("T=0"), la forma de $f(p)$ es la de un escalón, como puede verse en la Fig. 1, donde el ancho del escalón es el momento de Fermi $p_{\rm F}$.

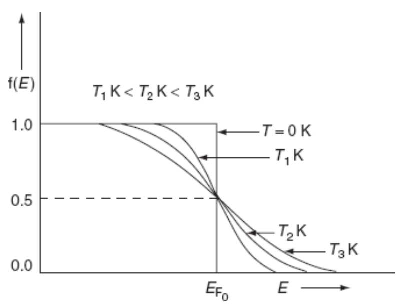

Figura 1: Grado de ocupación de los niveles de energía para fermiones.

Para hallar la relación entre la densidad de electrones y p_{F}, recordamos que:

$$n = \int_0^\infty n(p)dp.$$

Asi, deberíamos obtener: $n_e = 8\pi p_{\mathrm{F}}^3/3h^3$. Para calcular la energía de Fermi ϵ_{F} asociada, utilizamos el límite no relativista.

c) La temperatura característica asociada a ϵ_F está dada por: y $\epsilon_{\mathrm{F}} = kT_{\mathrm{F}}$. Para probar que la aproximación de gas fr o completamente degenerado es buena, se debería obtener $T_{\mathrm{F}} \gg 10^7$ K.

Sugerencia: probar hacer la misma estimación para el gas de iones, y veremos que la aproximación de un gas degenerado en ese caso no es buena.

7. **Ecuaciones de estado del gas de electrones completamente degenerado**

Utilizar la relación entre la densidad de partículas y el momento de Fermi del ejercicio anterior. También usar las relaciones entre la presión, la energía interna y la densidad de un gas vistas en la práctica 1.

8. **Características mecánicas de una enana blanca**

Utilizar las ecuaciones de estado correspodientes a cada tipo de gas para probar que la presión de los electrones es dominante.

9. **Características térmicas de una enana blanca**

Comparar los órdenes de los calores específicos correspondientes a cada tipo de gas, usando que para un gas degenerado se tiene $\frac{C_v}{Nk} \sim \frac{kT}{\epsilon_F}$. Debería obtener que el calor específico del gas de iones es mayor, por lo que es este el gas mediante el cual se enfría principalmente la enana blanca.

10. **Características mecánicas de una enana blanca II. Dependencia M(R)**

Tomando una presión "media" a partir de la ecuación de equilibrio hidrostático, se puede estimar que:

$$\bar{P} \sim \frac{GM^2}{4\pi R^4}.$$

De manera análoga, se puede estimar la presión media suministrada por los electrones en los casos no relativistas y ultra-relativistas, donde las dependencias resultan:

Electrones no relativistas:

$$P_e \propto \left(\frac{M}{R^3}\right)^{5/3},$$

Electrones ultra-relativistas:

$$P_e \propto \left(\frac{M}{R^3}\right)^{4/3}.$$

Dado que ya probamos que el equilibrio hidrostático en una enana blanca está sostenido por la presión de degeneración de electrones, igualando las presiones en cada caso se puede obtener la dependencia entre la masa y el radio. Discuta los resultados.

a) Proponemos un caso "general" para la ecuación de estado de los electrones degenerados, $P_e = K\rho^{\frac{4+x}{3}}$ ($x = 0$ ultrarelativista, $x = 1$ no relativista), y vemos cómo cambian las presiones de los electrones y la *necesaria* para mantener a la estructura en equilibrio hidrostático frente a una contracción ($\delta R < 0$).

A partir de calcular la variación de la presión media del ejercicio anterior, se puede ver que la presión necesaria para mantener a la estructura en equilibrio hidrostático crece como:

$$\frac{\delta \bar{P}}{\bar{P}} = -4\frac{\delta R}{R}.$$

De forma análoga, variando la presión dada por la ecuación de estado general de los electrones, se ve que el aumento de la misma está dado por:

$$\frac{\delta P_e}{P_e} = -(4+x)\frac{\delta R}{R}.$$

Existirá una nueva estructura estable frente a la contracción, sólo en el caso en que el aumento de la presión de los electrones sea mayor o igual al necesario para mantener la estructura en equilibrio, es decir: $\delta P_e/P_e \geq \delta \bar{P}/\bar{P}$. Caso contrario, la presión de los electrones no aumenta lo suficiente como para alcanzar una nueva configuración estable.