Elementos de Astrofísica Teórica

Lineamientos práctica 1: Mecánica Estadística y Termodinámica

1. La sugerencia para obtener las distribuciones de los distintos tipos de partícula, es calcular el número N_p de formas posibles de obtener una distribución $\{n_i\}_{i=1,...,M}$ con valores genéricos n_i, asumir que las cantidades n_i son continuas y calcular el máximo de N_p utilizando el método de multiplicadores de Lagrange (α, β) para incorporar las restricciones sobre N y U. Este desarrollo puede verse en el libro Alonso M. y Finn E., Física Vol. III, Fundamentos Cuánticos Y Estadísticos.

2. Para probar que los niveles de energía posibles de una partícula en una caja de lados a, b, c están dados por

$$E = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2), \tag{1}$$

donde

$$p_x = \frac{\pi\hbar}{a}n_x, p_y = \frac{\pi\hbar}{b}n_y, \quad p_z = \frac{\pi\hbar}{c}n_z, \tag{2}$$

y n_x, n_y y n_z son números cuánticos, hay que resolver la ecuación de Schrodinger para una partícula libre confinada a una caja (es decir, $V(\vec{r}) = 0$ dentro de la caja y condiciones de contorno periódicas). Se recomienda consultar el libro Alonso M. y Finn E., Física Vol. III, Fundamentos Cuánticos Y Estadísticos.

Dado que la separación entre los niveles de energía dependen de las dimensiones de la caja, podemos suponer que para dimensiones macroscópicas los niveles formarán un continuo. Por simplicidad también suponemos una caja cuadrada, donde $a = b = c$. De esta forma, la energía dependerá de $E \propto (n_x^2+n_y^2+n_z^2)$, y distintas combinaciones de los números cuánticos resultan en el mismo nivel de energía. Por lo tanto, queremos contar cuántos estados cuánticos corresponden al mismo nivel de energía. Para eso construimos un espacio donde cada punto corresponde a una combinación de los 3 números cuánticos (n_x, n_y, n_z). En este espacio, todos los puntos sobre la superficie de una esfera de radio $r = \sqrt{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)}$ tendrán la misma energía. Así, el número de estados cuánticos con energía $\leq E$ está dado por:

$$N(\leq E) = \frac{1}{8}\frac{4\pi r^3}{3}, \tag{3}$$

donde el factor 1/8 indica que sólo nos quedamos con el octante donde todos los números cuánticos son positivos. Para calcular el número de estados con energía en $(E, E + dE)$ derivamos y obtenemos:

$$N(E)dE = \frac{4\pi V(2m^3)^{1/2}}{h^3}E^{1/2}dE, \tag{4}$$

La densidad de estados se obtiene dividiendo por el volumen $V = a^3$. Por último, utilizamos que $g(p)dp = g(E)dE$ para hallar el valor de $g(p)$. El factor f se agrega teniendo en cuenta que la partícula puede tener degeneración intrínseca que no está contemplada en este desarrollo.

3. Dado que $n(p)dp$ representa la densidad de partículas con momento $p \in (p, p + dp)$, para obtener la densidad total de partículas n, integramos sobre todos los valores posibles del momento:

$$n = \int_0^\infty n(p)dp. \tag{5}$$

De manera análoga, $n(p)\epsilon(p)dp$ sería la densidad de energía en partículas con momento $p \in (p, p+dp)$. Luego la densidad total de energía está dada por:

$$u = U/V = \int_0^\infty n(p)\epsilon(p)dp. \tag{6}$$

Para probar que la presión P está dada por:

$$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty n(p)pvdp$$

donde la velocidad y la energía de cada estado de partícula libre están dadas por las expresiones usuales $v = \partial\epsilon/\partial p$ y $\epsilon(p) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$, calcularemos la fuerza ejercida por unidad de área debido a las colisiones de las partículas del gas. Consideremos una partícula con velocidad $\vec{v}$ que colisiona con una pared, como se muestra en el panel (a) de la Fig. 1.

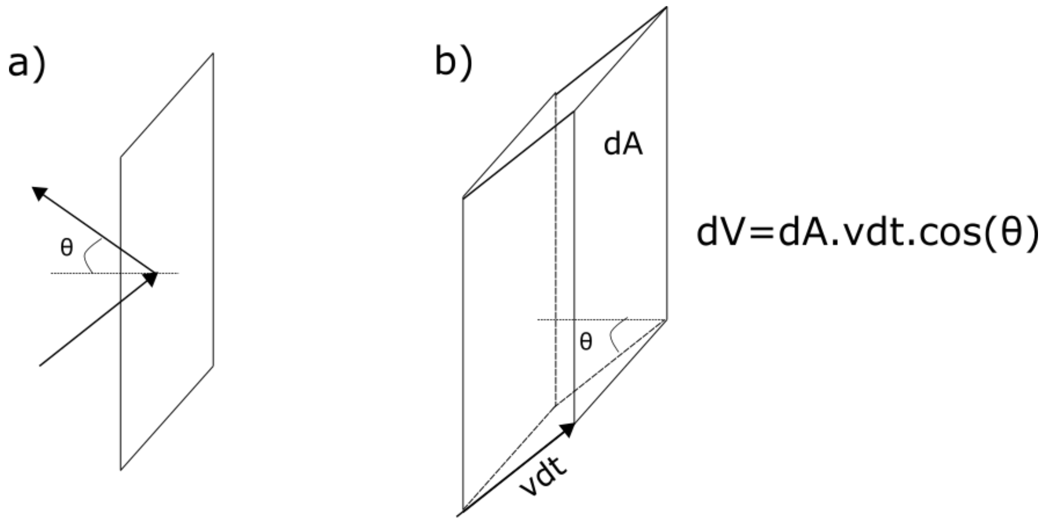

Figure 1: Panel (a): choque elástico de una partícula con velocidad $\vec{v}$ contra una superficie de área dA. Panel (b): colisión de todas las partículas con velocidad $\vec{v}$ que a tiempo t colisionan con el área dA.

Si consideramos un choque elástico, el cambio en la cantidad de movimiento de la partícula está dado por:

$$|\Delta\vec{p}|_1 = 2p\cos(\theta). \tag{7}$$

Si ahora consideramos todas las partículas que a tiempo t colisionan con el área dA, el cambio en la cantidad de movimiento del sistema será:

$$|\Delta\vec{p}|_{\mathrm{T}} = |\Delta\vec{p}|_1 \cdot \text{ número de partículas dentro del volumen } dV. \tag{8}$$

El número de partículas en el prisma es $n(\vec{p})d^3pdV$. Por lo tanto:

$$|\Delta\vec{p}|_{\mathrm{T}} = 2p\cos(\theta)\cdot n(\vec{p})d^3p\cdot v(p)dtdA\cos(\theta). \tag{9}$$

De esta forma, podemos ver que la presión realizada por esas partículas es:

$$P = \frac{d\vec{p}}{dt}\frac{1}{dA} = 2n(\vec{p})d^3pd^3rpv(p)\cos^2(\theta). \tag{10}$$

Ahora falta generalizar para incluir a las partículas con cualquier valor del momento p y que colisionan en diferentes direcciones. Asi, la presión total será:

$$P_{\mathrm{T}} = \int_0^{\infty} dp \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi p^2 \sin(\theta) 2n(\vec{p})pv(p)\cos^2(\theta). \tag{11}$$

Aquí hemos pasado a coordenadas esféricas, y consideramos que $0 \leq \theta \leq \pi/2$ para tener en cuenta sólo a aquellas partículas que colisionarán con la superficie.

Se deja como ejercicio mostrar que $n(p) = 4\pi p^2 n(\vec{p})$. Para esto utilizar que $n(\vec{p})$ es isotrópica, e integrar sobre las variables angulares.

4. Para hallar la relación entre la densidad de energía interna y la presión, primero veremos cómo podemos escribir le energía cinética y velocidad de las partículas en los límites no relativista y ultrarelativista. Las expresiones generales para la energía cinética y la velocidad de una partícula son:

$$\epsilon(p) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2, \tag{12}$$
$$v = \frac{\partial \epsilon}{\partial p}. \tag{13}$$

En el límite no relativista se cumple que $p\,c \ll m\,c^2$, por lo que podemos sacar factor común el término mc^2, obteniendo:

$$\epsilon(p) = mc^2\Big(\sqrt{\frac{p^2c^2}{m^2c^4} + 1} - 1\Big), \tag{14}$$

donde se cumple que $p^2c^2/m^2c^4 \ll 1$, y la raíz es del tipo $\sqrt{1+x}$ con $x \ll 1$. De esta forma podemos hacer un desarrollo de Taylor de esa función, para obtener una expresión simplificada de la energía cinética en el límite no relativista. La expresión es la conocida $\epsilon(p) = p^2/2m$. La velocidad de la partícula resulta $v = p/m$, resultado también conocido de la mecánica clásica.

En el límite ultrarelativista se cumple que $p\,c \gg m\,c^2$, por lo que en este caso podemos sacar factor común pc, obteniendo una función similar a la anterior para hacer un desarrollo de Taylor y despreciar términos de orden $O(mc^2/pc)$. En este caso, la energía cinética y velocidad quedan $\epsilon(p) = pc$ y $v = c$, respectivamente.

Una vez que tenemos las expresiones de la energía cinética y la velocidad en ambos límites, utilizamos las expresiones del ejercicio anterior para ver cómo se relacionan u y P. Recordar que las relaciones que se obtienen son independientes del tipo de partículas que componen el gas.

5. Para hallar la conocida ecuación de estado de un gas ideal clásico, nuevamente utilizaremos las relaciones del ejercicio 3, donde ahora $n(p)dp$ es la distribución de Maxwell-Boltzmann, ya que nos interesa el caso de una gas clásico. Ayuda: se deberá identificar al multiplicador de Lagrange β con la cantidad $1/kT$, donde k es la constante de Boltzmann y T la temperatura del gas.

6. La primera ley de la termodinámica para N constante resulta

$$dU = T\,dS - P\,dV. \tag{15}$$

Para hallar $U(T)$ utilizaremos que U es una función de estado, por lo tanto su variación entre dos estados A y B depende únicamente de los estados, y no del proceso por el que se pasó de uno a otro. De esta forma, elegimos un proceso a $V = cte$ y definimos $c_V = T\frac{\partial S}{\partial T}|_V$. Esto nos permite probar que:

$$U(T) = \int_0^T c_V(T')dT'. \tag{16}$$

Ver también los apuntes de la materia en la página.

7. (a) Dado que la energía interna es una cantidad extensiva, podemos escribir la U de la mezcla de gases como la suma de las energías internas de cada componente:

$$U = U_{\text{gas}} + U_{\text{rad}}, \tag{17}$$

donde $U_{\text{gas}} = 3NkT/2$ para el caso de un gas ideal clásico monoatómico y $U_{\text{rad}} = aT^4V$ para un gas de fotones.

Para escribir la presión total, utilizamos la ley de Dalton y sumamos las presiones parciales de cada componente. Puedo utilizar el resultado del ejercicio 4 para obtener las presiones a partir de la energía interna.

(b) Los calores específicos por unidad de masa se obtienen a partir de:

$$c_V = \frac{1}{\mu m_u}\frac{T}{N}\frac{\partial S}{\partial T}|_V, \tag{18}$$

$$c_P = \frac{1}{\mu m_u}\frac{T}{N}\frac{\partial S}{\partial T}|_P, \tag{19}$$

donde μ es el peso molecular medio, m_u es la unidad de masa atómica que se relaciona con la constante de los gases ideales R según $R = k/m_u$. Recordar que definimos $\beta = P_{\text{gas}}/(P_{\text{gas}}+_{\text{rad}})$.

Ayuda: el caso a V constante la primera ley de la termodinámica se simplifica, y el cálculo es mas sencillo. En el caso de P constante, esto no ocurre, asi que conviene escribir al volumen en función de (T, P) para poder realizar el cálculo.

Para ver el efecto de la radiación sobre los calores específicos del plasma, analice los límites $\beta \to 1$ y $\beta \to 0$.

8. Utilizar la primera Ley y que durante un proceso adiabático se cumple $dQ = 0$. Ver también los apuntes de la materia en la página.