Elementos de Astrofísica Teórica

Práctica 8: Órbitas Estelares

Validez de las aproximación fundamental de "campo medio"

1. Muestre que la fuerza gravitatoria ejercida sobre una partícula en una dada dirección depende tanto de la densidad de materia cercana como de la densidad en regiones lejanas. (Sugerencia: considere una distribucion de materia más o menos uniforme y muestre que para un dado ángulo solido (dirección) la aceleracion producida por la materia en regiones cercanas es similar a la producida por la materia en regiones lejanas)

2. Dado que aproximaremos a la atraccion gravitatoria de toda la galaxia mediante un campo medio, resulta interesante estimar cuanto se aparta la orbita de las estrellas en este campo medio de las orbitas reales. Para esto estimemos cual el cambio sobre la velocidad de una estrella δv que producen los sucesivos encuentros lejanos[1]($\delta v \ll v$) de una estrella con las otras estrellas de la galaxia.

   a) Bajo la suposicion de que la estrella tiene un encuentro lejano con otra estrella de la galaxia, estime el cambio en la velocidad de la estrella. (Sugerencia, aprovechando que el cambio en la velocidad es pequeño, utilice la llamada aproximación de impacto para estimar dicho cambio, esto es aproxime el movimiento relativo mediante una recta que pasa a una distancia b -parametro de impacto- del centro dispersor. Ver que b/v es la escala de tiempo t pica del problema, ya que es la unica cantidad con unidades de tiempo.).

   b) Estime el numero de impactos con parametros en $(b,\, b+db)$ que ocurren en una galaxia de tamano R con N estrellas de masa m cuando la estrella atravieza toda la galaxia (Sugerencia: Utilice que la densidad superficial de estrellas de la galaxia es de orden $\sim N/\pi R^2$). Luego considere el efecto sobre el módulo de la velocidad producido por n de estos choques con parámetro de impacto b sobre el módulo de la velocidad de la estrella. Para ello suponga que los choques ocurren en todas las direcciones con igual probabilidad (con lo que el problema se reduce a un problema de camino aleatorio).

   c) Muestre que para que un choque pueda ser considerado lejano, el parámetro de impacto debe estar por encima de un dado valor mínimo. Calcule entonces el cambio en el módulo de la velocidad de nuestra estrella original producido por todos los encuentros lejanos posibles, es decir con b entre $b_{\rm min}$ y R).

   d) Aprovechando que las velocidades caracteristicas de las estrellas en una galaxia de masa $M = Nm$ son $v^2 \sim GmN/R^2$, muestre que $b_{\rm min} \sim 2R/N$ y que

   $$\frac{\Delta v_{\rm tot}^2}{v^2} \sim \frac{8\ {\rm Ln}(R/b_{\rm min})}{N}.$$

   e) Estime el número de cruces a la galaxia necesarios para la estrella altere su velocidad en una magnitud comparable a su velocidad original en un sistema de tamaño R con N objetos. Considerando que la escala de tiempo para un cruce puede ser estimada como $t = R/v$, estime el tiempo necesario para que los encuentros lejanos alteren la órbita de la estrella respecto de la que tendría en un potencial suave. Analice este resultado para el caso de una galaxia $N \sim 10^{11}$.

[1]Entendemos por encuentros cercanos aquellos que producen una alteración en la velocidad de la estrella comparable a la velocidad que tenia la estrella antes del choque, es decir $\delta v \gtrsim v$. La idea aquí es estimar cuál es el efecto acumulado de sucesivos choques lejanos sobre la velocidad de una estrella.

[2]Nótese que tanto las velocidades de escape como las velocidades medias en un sistema que cumple el teorema del Virial, son de ese orden. De igual forma la velocidad final, luego del primer cruce a la galaxia, para una estrella que comienza en reposo es también de ese orden.

f) Considerando que las N estrellas estan distribuidas homogeneamente en la galaxia de tamaño R, estime la probabilidad de que una estrella sufra un encuentro cercano al atravezar toda la galaxia (Sugerencia: Calcule la sección eficaz para caer dentro de un encuentro cercano). >Tiene sentido despreciar estos eventos?.

Órbitas en potenciales centrales (simetría esferica)

3. Tal como se ha visto en la teoría, el movimiento de una partícula en un potencial central resulta confinado a un plano, por lo que suele describírselo mediante las coordenadas r y φ. Utilizando la conservación del momento angular L, se ha demostrado en la teoría que la órbita $(r_{(\varphi)})$ cumple la ecuación

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{1}{L^2}\frac{d\phi}{du} = 0.$$

a) Muestre que, integrando una vez la ecuación anterior, se encuentra que la órbita cumple la ecuación de primer orden

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{2}{L^2}(E-\phi) = 0.$$

b) Utilizando la ecuación encontrada en el inciso anterior, muestre que la función f,

$$f_{(u)} := u^2 + \frac{2}{L^2}\left[\phi_{(u)} - E\right],$$

cumple las siguientes propiedades:

1- Toma valores negativos, o iguales a cero, en las regiones en que existe movimiento.

2- Es cóncava hacia arriba.

3- Para órbitas ligadas es positiva en el origen.

4- Para órbitas ligadas posee un mínimo.

Con estos resultados analice las raíces de la función f y muestre que las órbitas ligadas o son circulares o están confinadas a un anillo entre dos valores r_1 y r_2.

4. Hallar la ecuación de la órbita en el potencial Newtoniano

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r}.$$

5. Mostrar que las órbitas en un potencial armónico esférico

$$\phi(r) = \frac{1}{2}\Omega^2 r^2,$$

son elipses centradas en el origen del potencial (sugerencia: resolver las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas).

6. **Aproximación epicíclica**

a) A partir de las ecuaciones de movimiento en un potencial central, mostrar que el movimiento en la coordenada r está dado por:

$$\ddot{r} + \frac{d\phi_{eff}}{dr} = 0 \qquad \text{donde} \qquad \phi_{\text{eff}} = \phi(\mathrm{r}) + \frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{r}^2} \qquad \mathrm{L} : \text{momento angular}$$

b) Sea $r(t) = r_g + x(t)$ con $|x| \ll r_g$ y donde r_g es la solución para una órbita circular.

i) Mostrar que a primer orden en x, se satisface:

$$\ddot{x} + \kappa^2 x = 0,$$

donde κ es la frecuencia epicíclica y est dada por

$$\kappa^2 = \left.\frac{d^2\phi_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_g} > 0.$$

ii) Mostrar que la frecuencia epicíclica de oscilación de una órbita próxima a una órbita circular de radio r_g está dada por:

$$\kappa^2 = 4\Omega^2(r_g) + r_g \left.\frac{d\Omega^2}{dr}\right|_{r=r_g},$$

con

$$\Omega = \left.\frac{L}{r^2}\right|_{r=r_g}.$$

c) Mostrar que $\Omega \lesssim \kappa \lesssim 2\Omega$, para ello suponer:

i) que en el centro de una galaxia la densidad $\rho \simeq cte$, mostrar que la velocidad angular de rotación $\Omega \simeq cte$, y en consecuencia la frecuencia epicíclica es $\kappa \simeq 2\Omega$.

ii) que en el borde de la galaxia $(r = R)$ es $M(r) \simeq M$, donde M es la masa total de la galaxia, mostrar que

$$\Omega^2 \simeq \frac{GM}{R^3},$$

y la frecuencia epicíclica es $\kappa \simeq \Omega$.

d) Considerar el movimiento en la dirección tangencial $\dot{\theta} = \frac{L}{r^2}$. Usando que $r = r_g + x$, mostrar que a primer orden en x es:

$$\theta(t) = \theta_0 + \Omega\, t - 2\, \frac{\Omega_g}{r_g}\, \frac{X}{\kappa}\, \sin(\kappa t + \alpha), \qquad \Omega_g = \Omega(r_g).$$

e) Si tomamos como origen el "epicentro" $r = r_g$, $\theta = \theta_0 + \Omega_g t$ y tomamos como eje cartesiano ortogonal al eje x, el eje $y = r_g \cdot [\theta - (\theta_0 + \Omega_g t)]$

Mostrar que la trayectoria en el sistema de coordenadas epicentrales es:

$$\frac{x^2}{X^2} + \frac{y^2}{Y^2} = 1,$$

donde

$$\frac{X}{Y} = \frac{\kappa}{2\,\Omega_g} < 1.$$

Graficar la trayectoria respecto del epicentro y respecto del centro de fuerzas.

Referencias

[1] Binney, J. y Tremaine, S., Galactic Dynamics.