Elementos de Astrofísica Teórica

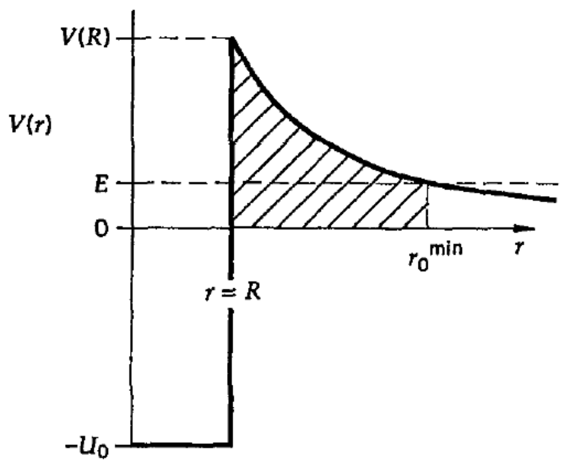
Práctica 6: Reacciones Nucleares

Introducción Breve: Uno de los procesos principales en el interior de las estrellas es la transformación de algunos elementos químicos en otros mediante la fusión de núcleos atómicos en otros de mayor masa [1]. Debido a que las masas de los núcleos antes de la fusión es usualmente mayor a la masa del núcleo resultante, estos procesos liberan una energía $\Delta E = \Delta M c^2$ por cada núcleo fusionado (ΔM es la diferencia de masas entre los núcleos que colisionan y el producto de la colisión). Dado que todos los núcleos atómicos poseen carga eléctrica positiva (estan compuestos de neutrones y protones) entonces los núcleos en colisión experimentan un potencial coulombiano repulsivo que dificulta la fusión. El potencial total entre dos núcleos atómicos puede aproximarse por la superposición de este potencial coulombiano y el potencial correspondiente a las fuerzas nucleares atractivas, las cuales son de corto alcance (solo aparecen a distancias del orden del radio nuclear). De manera que el potencial total posee una forma aproximada a la de la figura de la izquierda, en la cual a cortas distancias domina el potencial atractivo de las fuerzas nucleares ($U_0 \sim 30$ MeV) y a distancias mayores al radio nuclear domina el potencial coulombiano

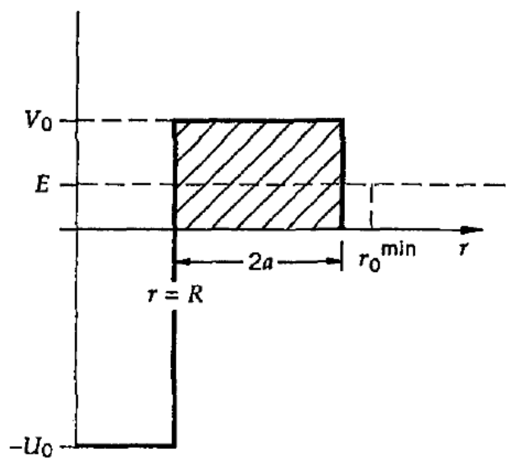
$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r},$$

donde Z_1 y Z_2 son los números atómicos de las particulas colisionantes y e es la carga electrónica en estatculombios (la expresión anterior esta en unidades cgs).

Nótese que en este enfoque el estado final (núcleo producto de la colisión) corresponde a un estado ligado de la partícula ($E < 0$) en el potencial total V(r).



Potencial "Realista"



Aproximacion mediante un potencial "cuadrado"

1. Calcule la energía liberada al transformarse 4 protones ($m_P = 1,0081\ m_u$) en 1 núcleo de helio ($m_{\mathrm{He}} = 4,0039\ m_u$). Muestre que esto permite explicar que el sol haya brillado durante toda su vida ($4,57 \times 10^9$ años) con brillos no muy diferentes del actual.

2. Utilizando que el radio nuclear R está dado por la relación $R \sim A^{1/3} \cdot 1,44 \cdot 10^{-13}$ cm (A; peso atómico).

[1] La fisión nuclear (separación de núcleos en otros mas pequeños) también ocurre en las estrellas pero solo se vuelve energéticamente importante en las últimas etapas de la vida de estrellas masivas.

(a) Calcule la máxima energía coulombiana y compárela con la energía térmica característica del centro de una estrella como el sol ($T \sim 10^7$ K).

(b) Estime la fracción de partículas con energía suficientemente altas como para superar la barrera de potencial (suponiendo que la distribución de velocidades es Maxwelliana). Discuta la posibilidad de que esto ocurra.

3. Es posible calcular aproximadamente y de manera sencilla la probabilidad de que una partícula con velocidad v penetre la barrera coulombiana de potencial aproximando el potencial realista por un potencial cuadrado elegido apropiadamente (ver figura). Para realizar esta estimación se considera el potencial cuadrado de la derecha, y la probabilidad de penetración T de la barrera de potencial resulta en

$$T = \frac{4k_3^2/(k_3+k_1)^2}{1+\left[1+\frac{(k_2^2-k_1k_3)^2}{k_2^2(k_1+k_3)^2}\right]\sinh^2(2ak_2)}, \tag{1}$$

donde

$$k_1^2 = \tfrac{2m(E+U_0)}{\hbar^2}, \tag{2}$$
$$k_2^2 = \tfrac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}, \tag{3}$$
$$k_3^2 = \tfrac{2mE}{\hbar^2}. \tag{4}$$

(a) Conociendo que las fuerzas fuertes generan un valor $U_0 \sim 30$MeV, estime valores para V_0 y E y muestre que $U_0 \gg E$ y $U_0 \gg V_0$. Aprovechando este resultado simplifique la expresión de T.

(b) Note que dicho valor es especialmente sensible al producto "$\sqrt{V_0-E}\cdot(2a)$" y aprovechando este resultado estime los valores de V_0 y a para que el potencial simplificado se corresponda con el potencial real que actúa sobre la partícula incidente.
(Sugerencia: Calcule $\bar{V}$ en la zona de interés e imponga que $\sqrt{V_0-E}\cdot(2a) = \int_R^{r_0}\sqrt{V(r)-E}\,dr$.)

4. El factor de penetración de la barrera Coulombiana, factor de Gamow, debida a dos núcleos de carga Z_1e y Z_2e es proporcional a

$$f_g(E) = e^{-2\pi Z_1Z_2e^2/\hbar v(E)}. \tag{5}$$

Tomando la energía potencial Coulombiana como $E_\mathrm{c} = Z_1Z_2e^2/r_0$ y la energía cinética de los núcleos como $E_\mathrm{k} = p^2/2m$ y aplicando el principio de incerteza para r_0 y p mostrar que el argumento de la exponencial en $f_g(E)$ es aproximadamente $E_\mathrm{c}/E_\mathrm{k}$.

5. Mostrar que si $f(x)$ es una función que posee un mínimo agudo en $x = x_0$ y $g(x)$ es una función suave, vale la aproximación

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-f(x)}dx \approx \sqrt{\frac{2\pi}{f''(x_0)}}g(x_0)e^{-f(x_0)}$$

6. La tasa de reacciones nucleares por unidad de volumen y tiempo (r_{jk}) entre partículas j y k puede calcularse mediante la expresión

$$r_{jk} = (1+\delta_{jk})^{-1}n_jn_k < \sigma v >$$

donde n_k y n_j son los números de partículas por unidad de volumen de las especies k y j, respectivamente. De manera que la determinación de las tasas de reacciones nucleares involucra la determinación del factor

$< \sigma(v) \cdot v >$. Debido a que la probabilidad de que una reacción ocurra depende de que la barrera coulombiana haya sido previamente atravezada entonces suele escribirse a $\sigma(v)$ dejando explícitamente el factor de penetración de Gamow;

$$\sigma(v(E)) = \frac{S(E)}{E} f_g.$$

Bajo la suposición de que la distribución de velocidades es Maxwelliana, obtenga una expresión para el factor $< \sigma(v) \cdot v >$. Para ello,

(a) Demuestre que $\sigma(v)$ puede escribirse como

$$\sigma(v(E)) = \frac{S(E)}{E} e^{-b/\sqrt{E}}$$

donde $b = 31.28 Z_1 Z_2 A^{1/2} \mathrm{Kev}^{1/2}$, con $A = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}$.

(b) Llevar a la expresión

$$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\mu \pi}} \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty S(E) e^{-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}} dE$$

Notar que es posible extender el límite inferior de la integral hasta $-\infty$ porque lo que se agrega es despreciable.

(c) Mostrar que la exponencial en el integrando posee un mínimo bien definido en

$$E_0 = \left(\frac{bkT}{2} \right)^{2/3}.$$

Calcule el valor E_0 para una colisión entre un protón (^{1}H) y un núcleo de deuterio (^{2}H) y $T \sim 10^7$K.

(d) Integrar mediante el método del ejercicio 5.

References

[1] Clayton D., Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis

[2] Kippenhahn R. y Weigert A., Stellar Structure and Evolution.