Elementos de Astrofísica Teórica

Práctica 5: Transporte radiativo de energía y atmósferas estelares

1. Son verdaderas o falsas la siguientes afirmaciones? Justificar las respuestas en cada caso.

   a) La intensidad específica, I_ν, es independiente de la distancia entre la fuente y el observador.

   b) El flujo de una fuente de radiación isotrópica es independiente de la distancia entre la fuente y el observador.

   c) El flujo de una fuente cuya intensidad específica es isotrópica es nulo.

2. Para una frecuencia ν, la función de Planck $B(\nu, T)$ está dada por

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/k_{\mathrm{B}}T) - 1}. \tag{1}$$

   a) Hallar la distribución de Planck en función de la energía, $B(E, T)$, y de la longitud de onda, $B(\lambda, T)$.

   b) La temperatura T que aparece en la expresión de la Planckeana es equivalente a la temperatura efectiva? Y a la temperatura de color? Justifique.

   c) Encontrar una expresión para la temperatura en el limite de Rayleigh-Jeans.

3. Mostrar que en condiciones de simetría axial en un dado punto del espacio (I_ν independiente del ángulo azimutal), la densidad de energía por unidad de frecuencia u_ν, el flujo F_ν y la presión de la radiación por unidad de frecuencia P_ν pueden obtenerse como los momentos de la intensidad específica respecto a la variable $\mu = \cos\theta$, donde θ es el ángulo cenital. Es decir,

$$\begin{aligned} u_\nu &= \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\, d\mu \\ F_\nu &= 2\pi \int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\, \mu\, d\mu \\ P_\nu &= \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\, \mu^2\, d\mu \end{aligned} \tag{2}$$

4. Mostrar que la distribución de fotones absorbidos por el gas en todas las direcciones, dentro del intervalo de frecuencias $(\nu, \nu + d\nu)$, por unidad de tiempo y superficie normal, en el intervalo $(\tau_\nu, \tau_\nu + d\tau_\nu)$, está dada por:

$$\frac{4\pi J_\nu}{h\nu}.$$

5. Bajo la aproximación de capas planas y paralelas, y suponiendo que S_ν es isotrópica, demostrar que el flujo de radiación F_ν cumple

$$F_\nu = -\frac{c}{k_\nu} \frac{dP_\nu}{dz}.$$

6. Utilizando el ejercicio anterior y considerando una atmósfera gris, demostrar que bajo la aproximación de Eddington vale

$$P_{\mathrm{rad}} = \frac{\sigma T_{\mathrm{ef}}^4}{c}(\tau + \frac{2}{3}), \qquad T^4 = \frac{3}{4} T_{\mathrm{ef}}^4 (\tau + \frac{2}{3}). \tag{3}$$

7. Utilizando el resultado anterior y la ecuación de equilibrio hidrostático, demuestre que existe una potencia máxima que puede ser radiada por una estrella de masa $M_\star$ (conocida como 'Luminosidad de Eddington') dada por

$$L_{\rm Edd} = \frac{4\pi c G M_\star}{\kappa_{\rm fotosfera}}.$$

8. *a*) Bajo la aproximación de capas planas y paralelas obtener la ecuación integral para I_ν conocida como "Solución Formal de la Ecuación de Transporte";

$$I(\tau_1) = I(\tau_2)\, e^{-(\tau_2-\tau_1)/\mu} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S\, e^{-(\tau-\tau_1)/\mu} \frac{d\tau}{\mu}.$$

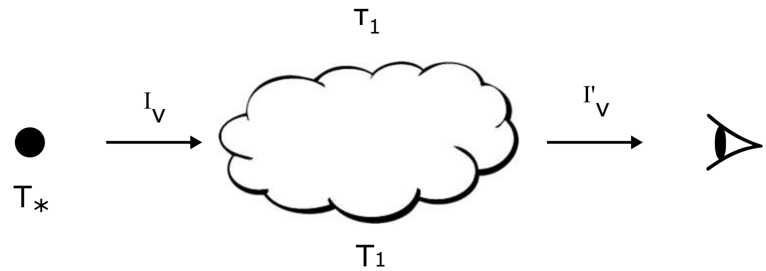
   b) Bajo la aproximación de que T es constante en el material y la función fuente obedece la función de Planck (i.e. dominan los procesos denominados térmicos) se tiene que $S = cte$. En estos casos, derive como es la intensidad específica emergente en el punto τ_1 para los casos ópticamente delgado ($\tau_2 - \tau_1 \ll 1$, material casi transparente) y ópticamente grueso ($\tau_2 - \tau_1 \gg 1$, material opaco).

   c) Analizar el caso de una atmósfera seminfinita ($\tau_2 = \infty$ y $\tau_1 = 0$). Bajo la suposición de que la función fuente crece linealmente con la profundidad óptica ($S_\nu(\tau_\nu) = a_\nu + b_\nu \tau_\nu$) mostrar que la intensidad emergente cumple

$$I(0, \mu, \nu) = a_\nu + b_\nu \mu.$$

   Lo que permite reconstruir el estado de la función fuente en la atmósfera mediante la medición de la radiación emergente.

9. Considere una estrella emitiendo como un cuerpo negro a la temperatura $\mathrm{T}_\star$ que está localizada detrás de una nube de gas que se encuentra en equilibrio termodinámico a la temperatura T_1. Asuma que no existen procesos dispersivos en la nube y que ésta posee una profundidad óptica τ_1 como se muestra en la figura:



   Encuentre cuál es la intensidad específica de la radiación en: (i) la superficie de la estrella y (ii) la posición del observador.

Referencias

[1] Hansen, C. y Kawaler, S., Stellar Interiors

[2] Mihalas, D., Stellar Atmospheres (segunda edición)