Elementos de Astrofísica Teórica

Práctica 4: Estructuras en equilibrio hidrostático y enanas blancas

Estructuras en equilibrio hidrostático:

1. Utilizando la ecuación de equilibrio hidrostático y considerando que el gas que compone el sol se comporta como un gas ideal clásico, estimar los valores para las presiones, densidades y temperaturas típicas del interior del sol.

2. Considere una estrella de masa M en la cual la densidad decrece desde el centro a la superficie según

$$\rho = \rho_{\text{central}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right],$$

donde r es la distancia al centro de la estrella y R el radio de ésta.

   a) Encuentre $m(r)$ y $P(r)$ y la relación $M(R)$.

   b) Asumiendo que el gas es un gas ideal clásico, calcule $T(r)$. Verifique que $T(R) = 0$.

   c) Calcule la energía potencial $W(R, \rho_{\text{central}})$. Compare el valor calculado con el obtenido mediante una estimación cruda de W.

3. *a*) Resolver la ecuación de Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^n = 0.$$

   para $n = 0$ y $n = 1$ bajo las condiciones de contorno $\theta(0) = 1$ y $\frac{d\theta}{d\xi}|_0 = 0$ (justificar esta última condición). La densidad ρ, el radio r y la presión P están vinculados a θ y ξ por: $r = \alpha\xi$, $\rho = \lambda\theta^n$, $P = K\rho^{1+1/n}$ donde λ y K son constantes y

$$\alpha^2 = \frac{K(n+1)\lambda^{-1+1/n}}{4\pi G}.$$

   Hallar, si es posible, la expresión de $\rho(r)$ en cada caso. La polítropa de índice $n = 0$, ¿qué representa?

   b) Demostrar que $\theta(\xi) = (1 + \xi^2/3)^{-1/2}$ es solución de una ecuación de Lane-Emden. ¿De qué valor de n?

   c) Mostrar que si el cociente entre la presión total y la presión de la radiación permanece constante en toda la estructura, i.e. $\beta := P_{\text{gas}}/P = cte, \forall r$, entonces la estructura corresponde a una polítropa de índice $n = 3$.

4. *a*) Mostrar que para una polítropa de índice n, el radio, la masa, la presión central y la energía potencial son:

$$M = -4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \lambda^{\frac{3-n}{2n}} \left[\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi_1},$$

$$P_c = \frac{GM^2}{R^4} \left(4\pi(n+1) \left[\frac{d\theta}{d\xi} \right]^2_{\xi_1} \right)^{-1},$$

$$W = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R},$$

   donde ξ_1 es la menor raíz de $\theta(\xi) = 0$ y corresponde al radio de la polítropa.

b) Utilizando el resultado anterior, calcular los valores de $\rho_c^{\odot}$, $P_c^{\odot}$, $T_c^{\odot}$ y $W^{\odot}$ utilizando los valores medidos de $M_{\odot}$ y $R_{\odot}$. Comparar con los obtenidos en el punto 1.

5. El teorema del Virial para un gas ideal clásico y monoatómico enuncia que la energía total de un sistema ligado ($E_{\rm tot} = E_{\rm interna} + E_{\rm gravitatoria}$) gravitatoriamente cumple

$$E_{\rm tot} = -E_{\rm interna} = E_{\rm gravitatoria}/2.$$

Mostrar que esto implica que la mitad de la energía liberada por una contracción del sistema es utilizada para aumentar la temperatura interna. De manera que un gas ideal autogravitante se calienta al contraerse, lo que suele describirse diciendo que estos sistemas poseen un calor específico negativo (frente a procesos realizados en equilibrio hidrostático).

Propiedades Mecánicas y Térmicas de las Enanas Blancas

6. **Validez de la hipótesis de gas de electrones completamente degenerado ("T=0")**

a) Utilizando que las enanas blancas poseen masas típicas entre 0,5 $M_{\odot}$ y 1 $M_{\odot}$ y radios similares al terrestre, calcule la densidad numérica de electrones (n_e) típica en estos objetos. Considere carga total nula y composición química de carbono puro (Z=6).

b) Con el valor de n_e obtenido en el punto anterior, asumiendo $T = 0$ y despreciando efectos relativistas, calcule la energía de Fermi ϵ_F del gas de electrones.

c) Calcule la temperatura característica asociada a ϵ_F y demuestre que el gas de electrones de una enana blanca (cuyas temperaturas son $T \lesssim 10^7$K) puede considerarse "frio" (i.e. completamente degenerado) en muy buena aproximación.

7. **Ecuaciones de estado del gas de electrones completamente degenerado**

Hallar la densidad numérica de partículas para un gas de fermiones a $T = 0$ (totalmente degenerado), y la presión y la densidad de energía en los límites no-relativista y ultra-relativista.

8. **Características mecánicas de una enana blanca**

Describiendo al gas de electrones en una enana blanca como un gas completamente degenerado y no relativista y al gas de iones como un gas ideal clásico (a $T \sim 10^7$K), calcule la contribución de ambas componentes del plasma estelar a la presión total. ¿Qué partículas proporcionan la presión que mantiene a la enana blanca en equilibrio hidrostático?

Nota: Utilice el valor de n_e estimado en el punto anterior y que en el caso de carbono puro $n_{\rm iones} = n_e/6$.

9. **Características térmicas de una enana blanca**

Describiendo al gas de electrones en una enana blanca como un gas completamente degenerado y no relativista y al gas de iones como un gas ideal clásico, compare el calor entregado por el gas de iones y por el gas de electrones al disminuir la temperatura del plasma (recuerde que el calor específico de un gas completamente degenerado cumple $\frac{C_v}{Nk} \sim \frac{kT}{\epsilon_F}$). ¿Qué partículas liberan la mayor parte del calor al enfriarse una enana blanca?

10. **Características mecánicas de una enana blanca II. Dependencia M(R)**

a) Utilizando que la presión en una enana blanca es ejercida principalmente por los electrones degenerados (Ej. 8), y notando que la ecuación de equilibrio hidrostático nos permite estimar que

$$\bar{P} \sim \frac{GM^2}{4\pi R^4}$$

donde $\bar{P}$ es una presión "media" del plasma en toda la enana blanca, calcule la dependencia $M(R)$ para el caso de

Electrones no relativistas: $P_e = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{20m} n^{5/3}$. ¿Qué enanas blancas serán de mayor tamaño?

Electrones ultra-relativistas: $P_e = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8} n^{4/3}$. ¿Qué ocurre en este caso?, ¿Qué significa esto? (ver próximo punto)

b) Analizanzo el caso "general" $P_e = K\rho^{\frac{4+x}{3}}$ ($x = 0$ ultrarelativista, $x = 1$ no relativista) y considerando pequeñas perturbaciones de los valores medios de equilibrio, muestre que frente a una contracción ($\delta R < 0$), la presión *necesaria* para mantener a la estructura en equilibrio hidrostático crece como

$$\frac{\delta \bar{P}}{\bar{P}} = -4 \frac{\delta R}{R}$$

mientras que la presión ejercida por los electrones aumenta según

$$\frac{\delta P_e}{P_e} = -(4 + x) \frac{\delta R}{R}$$

En vistas del resultado anterior analice si es posible tener una estructura estable con $x \leq 0$.

Referencias

[1] Clayton D., Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis

[2] Hansen, C. y Kawaler, S., Stellar Interiors

[3] Kippenhahn R. y Weigert A., Stellar Structure and Evolution.