Elementos de Astrofísica Teórica

Práctica 1: Mecánica Estadística y Termodinámica

1. Considere un sistema macroscópico de N partículas en el cual cada partícula puede estar en alguno de M *niveles de energía* posibles $\epsilon_1, \epsilon_2, ...$ los cuales estan degenerados un número g_i ($g_i \gg 1$). A cada momento podemos decir que habrá un número n_i de partículas en cada nivel de energía ϵ_i, los cuales cambiarán constantemente debido a las colisiones y transiciones que ocurren a nivel microscópico entre las diferentes partículas. Si el sistema esta aislado del exterior y las partículas no se destruyen, sabemos que debe cumplirse

$$N = \sum_{i=1}^{M} n_i, \qquad U = \sum_{i=1}^{M} n_i \epsilon_i. \tag{1}$$

Bajo la suposición de que cada partícula posee la misma probabilidad intrínseca de ocupar cada uno de los *estados microscópicos*, demostrar que la distribución de números de ocupación $\{{n_i}^*\}_{i=1,...,M}$ más probable esta dada por:

$$\text{a)} \quad {n_i}^* = g_i e^{-\alpha-\beta\epsilon_i}, \tag{2}$$

para el caso de partículas distinguibles.

$$\text{b)} \quad {n_i}^* = g_i \frac{1}{e^{\alpha+\beta\epsilon_i} - 1}, \tag{3}$$

para partículas indistinguibles sin restricciones en el número de ocupación de cada estado microscópico (bosones).

$$\text{c)} \quad {n_i}^* = g_i \frac{1}{e^{\alpha+\beta\epsilon_i} + 1}, \tag{4}$$

para partículas indistinguibles si no puede haber más de una en cada estado microscópico disponible (fermiones).

Sugerencia: Calcular el número N_p de formas posibles de obtener una distribución $\{n_i\}_{i=1,...,M}$ con valores genéricos n_i, asumir que las cantidades n_i son continuas y calcular el máximo de N_p utilizando el método de multiplicadores de Lagrange (α, β) para incorporar las restricciones dadas por las ecuaciones 1.

Nota: Es posible demostrar, que cuando $N \to \infty$, los valores de ${n_i}^*$ de la distribución más probable recién calculada coinciden con los valores medios de ocupación $< n_i >$ de dichos estados, cuyos valores determinarán las cantidades medidas macroscópicamente.

2. Muestre que el número de degeneración de los estados cuánticos de las partículas de un gas ideal esta dado por $g(p)dp = (f/h^3)4\pi p^2 dp$, donde f es el número de estados de espín de la partícula.

Sugerencia: Contar el número de estados por unidad de volumen de una partícula en una caja de lados a, b, c ($a\,b\,c = V$), teniendo en cuenta que los niveles de energía posibles están dados por

$$E = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2), \tag{5}$$

donde

$$p_x = \frac{\pi\hbar}{a} n_x, p_y = \frac{\pi\hbar}{b} n_y, \quad p_z = \frac{\pi\hbar}{c} n_z, \tag{6}$$

y n_x, n_y y n_z son números cuánticos.

3. Utilizando los puntos anteriores y que para gases ideales monoatómicos genéricos (independientemente de si son partículas clásicas, bosones o fermiones), las cantidades termodinámicas n (densidad de partículas por unidad de volumen), u (energía por unidad de volumen) son:

$$\begin{aligned} n &= \int_0^\infty n(p) dp, \\ u = U/V &= \int_0^\infty n(p)\epsilon(p) dp, \end{aligned}$$

demostrar que la P (presión) pueden obtenerse como:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty n(p) p v dp$$

Aquí, la velocidad y la energía de cada estado de partícula libre están dadas por las expresiones usuales $v = \partial\epsilon/\partial p$ y $\epsilon(p) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$.

4. Muestre que, independientemente del tipo de partículas que componen un gas, la relación entre la energía interna U [1] y la presión solo depende del estado cinético de las partículas y vale:

$$\begin{aligned} u = U/V &= \frac{3}{2}P, \quad \text{si las partículas son no relativistas, } p\,c \ll m\,c^2 \\ u = U/V &= 3P, \quad \text{si las partículas son ultrarelativistas, } p\,c \gg m\,c^2. \end{aligned}$$

5. Mostrar que para un gas clásico ideal se cumple la ecuación de estado $P = nkT$.

6. A partir de la primera ley de la termodinámica y considerando N constante, mostrar que la energía interna puede escribirse como

$$U(T) = \int_0^T c_V(T') dT', \tag{7}$$

donde $c_V = T \frac{\partial S}{\partial T}|_V$.

7. Si tanto los iones como los electrones que componen el plasma estelar se encuentran no-degenerados y son no relativistas, el material puede considerarse una mezcla de un gas ideal clásico (iones + electrones) y un gas de fotones.

   (a) Escriba las expresiones para la presión total del gas y para la energía interna total por unidad de masa

[1] En realidad nos referimos a la parte de la energía interna del gas asociada a los grados de libertad traslacionales de las partículas del gas, que en un gas monoatómico son los únicos grados de libertad posibles. Si el gas es poliatómico (moléculas), estas relaciones no son válidas.

(b) Usando estas expresiones, derive los valores de c_p y c_v (calores específicos por unidad de masa) para la mezcla de gas ideal clásico y fotones y muestre que

$$
\begin{aligned}
c_V &= \frac{3R}{2\mu}\frac{8-7\beta}{\beta} &\quad (8)\\
c_P &= \frac{3R}{2\mu}\frac{32/3-8\beta-\beta^2}{\beta^2} &\quad (9)
\end{aligned}
$$

donde β está definido como el cociente entre la contribución del gas de partículas materiales (iones y electrones) y la presión total del gas;

$$\beta = P_{\mathrm{gas}}/(P_{\mathrm{gas}} + P_{\mathrm{radiacion}}).$$

Analice el efecto de la radiación sobre los calores específicos del plasma.

8. Probar que en un proceso adiabático (dQ= 0) realizado por un gas ideal:

$$
\begin{aligned}
PV^{\gamma} &= \ cte, \\
T^{\gamma}P^{1-\gamma} &= \ cte, \qquad (10)\\
TV^{\gamma-1} &= \ cte
\end{aligned}
$$

donde $\gamma = (3a+2)/3a$ y $a = 2c_v/3Nk$.

References

[1] Alonso M. y Finn E., Física Vol. III, Fundamentos Cuánticos Y Estadísticos

[2] Reiff, Fundamentals of Statistical Mechanics and Thermal Physics

[3] Clayton D., Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis

[4] Callen H., Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics

[5] Hansen, C. y Kawaler, S., Stellar Interiors