Curso de Verano 2019 -Algebra (Grupo Ciencias)-

Cuadernillo de ejercicios

Números Naturales y Combinatoria

1. Demostrar por inducción completa que que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$
2. Demostrar por inducción completa que, para todo natural n, $10^{n+1} + 10^n + 1$ es divisible por 3.
3. Demostrar por inducción completa que para todo $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) x^i$.
4. Demostrar por inducción completa que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.
5. Determinar si existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que el coeficiente del término de grado 9 de $(m.x + x^{-2})^{11}$ sea igual a 3.
6. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Demostrar por inducción completa que para todo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$ vale que $\left(\begin{array}{c} m \\ n_0 \end{array} \right) \in \mathbb{N}$.
7. Sea $A = \{1, 2, ..., 10\}$; $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y $C = A \cup B$. ¿ Cuántas funciones de A en B pueden definirse?. ¿ Cuántas funciones biyectivas de A en B pueden definirse?. ¿ Cuántas funciones inyectivas de A en C pueden definirse?. Justificar la respuesta.
8. Sea A un conjunto con n elementos. Si k es un entero tal que $0 \leq k \leq n$, ¿cuántos subconjuntos con k elementos tiene A. ¿En base a lo anterior, determine el cardinal del conjunto de partes de A, $\mathcal{P}(A)$? Justificar las respuestas.
9. Sea A un conjunto con n elementos. Si k es un entero tal que $0 \leq k \leq n$, ¿cuántos subconjuntos con a lo sumo k elementos tiene A? Sea a un elemento dado de A, ¿cuántos subconjuntos de A con a lo sumo k elementos contienen el elemento a?
10. En una empresa en la que trabajan 15 hombres y 7 mujeres se quiere formar una comisión gremial integrada por 3 personas. ¿De cuántas formas puede hacerse ? ¿De cuantas si debe haber al menos un hombre y una mujer? ¿De cuántas si Juan y Pedro no pueden estar juntos en la comisión? ¿De cuantas si obligatoriamente María tiene que fomar parte de la comisión?
11. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 20 bolillas numeradas en 3 cajas? ¿De cuántas si la primera no puede estar vacía?
12. Se tira una moneda al aire 10 veces y se registra el resultado. Cuantos resultados distintos posibles hay? Cuantos en los cuales haya 6 caras y 4 cecas?

Relaciones

13. Sea $A = \{a, b, c\}$. Considere el conjunto de partes de de A ordenado por inclusión y haga el correspondiente diagrama de Hasse. ¿$(\mathcal{P}(A)$ es un conjunto totalmente ordenado por $\subseteq$?

14. a) Sea $\leq$ una relación de orden en un conjunto A. Definimos la relación $\sim$ en $A \times A$ de la siguiente forma $(a, b) \sim (c, d) \;\Leftrightarrow a \leq c$ y $b \leq d$. ¿La relación $\sim$ es de orden?

    b)Definir conjunto totalmente ordenado y conjunto bien ordenado. ¿Cómo es el diagrama de Hasse de un orden total? De un ejemplo de un orden en el conjunto $\mathbb{N}$ que no sea total.

15. Considerar la relación de orden definida por el siguiente diagrama de Hasse sobre un conjunto A. Determinar si existen subconjuntos B, C, D de A tales que: a) B no admite cotas superiores. b) C no tiene ínfimo. c) D tiene ínfimo pero no tiene primer elemento.

16. Definir relación inversa. Definir función inversa. Demostrar que una función admite inversa si y solo si es biyectiva.

17. Sea $\sim$ la relación definida en $\mathbb{R}$ en la forma $x \sim y \Leftrightarrow (x-1)^2 = (y-1)^2$. Probar que $\sim$ es de equivalencia. Determinar la partición de $\mathbb{R}$ asociada a esta relación.

18. Sea $\sim$ la relación definida en $\mathcal{R}^{\mathcal{R}}$, en la forma: $f \sim g \Leftrightarrow f(1) = g(1)$. Analizar cuales de las propiedades reflexiva, simétrica, antisimétrica, y/o transitiva satisface esta relación. ¿Es una relación de equivalencia? En caso afirmativo hallar la clase de eqivalencia de la función identidad y la clase de equivalencia de la función exponencial. Describir el conjunto cociente. Justificar las respuestas.

19. Definir función. Decir si la relación R de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{N}$ dada por xRy si y solo si $y = x^2 + 1$ es función o no. En caso afirmativo analizar la inyectividad y la suryectividad.

20. a)Sea $\sim$ la relación definida en $\mathbb{C}$ en la forma $z \sim w \leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ tal que $z = \lambda w$. ?´Es de equivalencia ? Si lo es hallar las clases de equivalencia. Caracterizar el conjunto cociente.

21. a)Sea $\sim$ la relación definida en $\mathbb{C}$ en la forma $z \sim w \leftrightarrow |z| = |w|$. Probar que es de equivalencia y hallar las clases de equivalencia. Caracterizar el conjunto cociente.

    b)La relación Θ dada por dada por $z\Theta w \leftrightarrow |z| \leq |w|$,¿ es de orden? Justificar.

Números Enteros y Congruencias

22. Sean $n \in \mathbb{N}$, $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$. Demostrar que si $a \equiv a' \, mod(n)$ y $b \equiv b' \, mod(n)$ entonces $a + b \equiv a' + b' \, mod(n)$ y $a.b \equiv a'.b' \, mod(n)$.

23. Definir número primo. Enunciar el teorema fundamental de la Aritmética. Probar que si p es un número primo positivo entonces $\sqrt{p}$ no es un número racional.

24. Demostrar que no existen enteros m y n tales que $m^2 = 180n^4$.

25. Probar que si $(a, b) = 1$ entonces $(a^2.b, a + b) = 1$.

26. Calcular el resto de dividir 2^{93} por 3.

27. Definir máximo común divisor. Demostrar que si a y b son enteros positivos entonces $\frac{a}{(a,b)}$ y $\frac{b}{(a,b)}$ son coprimos.

28. Demostrar la validez del criterio de divisibilidad por 3.

29. Definir número primo. Demostrar que el conjunto de los números primos es infinito.

30. a) Definir mínimo común múltiplo. Demostrar que si a y b son enteros positivos entonces $a.b = (a,b).[a,b]$

    b) Sea a un entero positivo cualquiera, calcular $(a, a+1)$ y $[a, a+1]$.

31. a) Enunciar el Teorema Fundamental de la Aritmética.

    b)Demostrar que no existen enteros m y n tales que $m^2 = 300n^4$.

    c) Calcular cuantos divisores distintos positivos posee el número 900. Justificar.

    d) Cuantos de esos divisores terminan en la cifra 0 (cero). Justificar.

32. a)Calcular cuantos divisores distintos positivos posee el número $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Justificar.

    b) Cuantos de esos divisores son múltiplos de 6? Justificar.

33. Probar que un elemento no nulo $\overline{m}$ de $\mathbb{Z}_n$ admite inverso multiplicativo $\Leftrightarrow (m,n) = 1$.

Números complejos

34. Determinar si existen valores de $n \in \mathbb{N}$ tales que $\left(\frac{1}{5} + i\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^n$ es un número real. Justificar.

35. Determinar los números complejos z tales que $\mid z+i \mid = \mid z+2i \mid$. Representarlos en el plano complejo.

36.
    a) Definir raiz n-ésima de la unidad.
    b) Definir raiz primitiva de orden n de la unidad.
    c) Determinar $\mathbb{G}_8$ e indicar las raices primitivas de orden 8.

37. Determinar los complejos z tales que $(\frac{z-1}{1+i})^4 = -1 + i$.

38. Determinar en forma trigonométrica todos los números complejos z tales que $z^6 = (2-2i)^{10}$.

39. Resolver $(z+1)^4 = (z+i)^2$.

40. Determinar para que valores de n el complejo $(-1+i)^n$ es un real negativo.

41.
    a) Determinar gráficamente las raices octavas de la unidad.
    b) Utilizando lo hallado en a) y sabiendo que $(1+i)^8 = 16$ determinar los complejos z tales que $z^8 = 16$.

42. Determinar el conjunto de números complejos z tales que $z^2 = \overline{z}$.

43.
    a) Definir raíz primitiva de la unidad de orden n.
    b) Sea w una raíz primitiva de la unidad de orden 3, probar que $(1-w+w^2).(1+w-w^2) = 4$.

Polinomios

44. Factorizar en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$ el siguiente polinomio:

$$p = (x^2 + 2x + 2)^{22}(x - \sqrt{3})(x - i\sqrt[4]{3})(x + i\sqrt[4]{3}).$$

45. *a*) Sea $p \in \mathbb{Z}[x]$. Probar que si $m \in \mathbb{Z}$ es raíz de p entonces m divide a p_0 (el término independiente de p).

    b) Determinar si el polinomio $p = x^{50} - 24x^{40} + 10x^{30} - x^{20} + 1$ admite raices enteras.

46. *a*) Sea $p = 6x^4 + ax^3 + bx^3 + cx + d$ un polinomio de $\mathbb{R}[x]$. Sabiendo que $z = 2i$ es una raiz de p de multiplicidad 2, hallar las restantes raices y factorizar p en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

    b) Calcular el polinomio derivado de p y hallar sus raices.

    c) Definir grado de multiplicidad de una raíz de un polinomio $q \in \mathbb{K}[x]$. Probar que si α es raíz de q con multiplicidad $m > 1$ entonces α es raíz del polinomio derivado q' con multiplicidad $m - 1$.

47. Enunciar el Teorema Fundamental del Algebra. El hecho de que el polinomio $x^2 + 1$ no tenga raíces reales, ¿contradice este Teorema? Justifique.

48. Determinar a para que el polinomio $p = nX^{n+1} - (n+1)X^n$ tenga todas sus raices simples.

49. Determinar el mínimo común múltiplo entre $p = x^3 + 3x^2 - 4$ y $q = x^3 - 3x + 2$.

50. *a*) Sabiendo que $p = x^3 + 2x^2 - 32x - 96$ tiene una raíz doble factorizar el polinomio p en $\mathbb{R}[X]$.

    b) Utilizando la factorización obtenida en a) determinar el máximo común divisor entre p y $q = x^4 + 2x^2 + 1$.

51. Definir polinomio irreducible. Describir los polinomios irreducibles de $\mathbb{R}[x]$ y los de $\mathbb{C}[x]$.

52. a)Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar la multiplicidad de 1 como raíz del polinomio

$$p = x^{2n+1} - x^{n+1} - x^n + 1.$$

    b) Probar que, para cualquier valor de n, $q = x^3 - x^2 - x^1 + 1$ divide a p.

53. a) Determinar el polinomio p de $\mathbb{R}[x]$, mónico, de grado mínimo tal que $p(1+i) = p'(1+i) = 0$ y $p(0) = p'(0) = p''(0) = 0$.

    b) Hallar todos los polinomios de $\mathbb{R}[x]$, mónicos, de grado 2 que dividen al polinomio p hallado.

    c) Expresar el polinomio p hallado en potencias de $(x - 1)$.

54. Enunciar el terorema fundamental de la Aritmética para polinomios de $\mathbb{K}[x]$ donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo conmutativo. Describir los polinomios primos de $\mathbb{R}[x]$ de $\mathbb{C}[x]$.

55. a) Hallar los valores de $k \in \mathbb{C}$ para los cuales $p = x^{20} + 8x^{10} + 2k$ admite al menos una raíz múltiple.

    b) Calcular el máximo común divisor $(x - i, x^{48} - 1)$.

56. Demostrar que si $p \in \mathbb{R}[x]$ tiene grado mayor que 2 entonces p es reducible en $\mathbb{R}[x]$.

57. Factorizar en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$ el siguiente polinomio:

$$p = (x^4 + 2x^2 + 1)^{22}.$$

58. Sean $p, q \in \mathbb{K}[x]$. Probar que p divide a q si y solo si toda raíz de p es raíz de q. Determinar el polinomio mónico que tiene a 3 como raíz y es divisible por $q = x^2 - x + 2$. Factorizarlo en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

59. Sabiendo que $p = x^4 + 2x^3 - 32x^2 - 96x$ tiene una raíz doble factorizar el polinomio p en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

60. Demostrar que el polinomio $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$ tiene todas raices simples.

61. a) Probar que si $p, q \in \mathbb{K}[X]$ son coprimos entonces para todo natural n vale que $(p, q^n) = 1$.

    b) Factorizar en $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$, el polinomio $p = (x^4 + x^2 + 1)^3$.

62. a) Probar que si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de $p \in \mathbb{R}(x)$ entonces el conjugado de z también lo es.

    b) Probar que si $p \in \mathbb{R}[x]$ y $gr(p) = 2.k$ con $k > 1$, entonces p no es irreducible.

Matrices, Determinantes y Sistemas. Espacios Vectoriales.

63. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & -1 & 10 \\ -1 & a & -6 \end{pmatrix}$$

    a) Calcular el rango de A para los distintos valores de a.

    b) Para que valores de a el sistema $A.X = 0$ es compatible determinado?

    c) Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, la función definida en la forma:

$$g((x, y, z,)) = A. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

    Para que valores de a la función g es inyectiva?

64. Definir rango de una matriz. Enunciar el teorema que, dada una matriz cuadrada A, vincula la existencia de matriz inversa A^{-1}, el rango de la matriz A y el valor del determinante $\mid A \mid$. Enunciar el teorema de Rouche-Frobenius.

65. Definir inversa de una matriz. Probar que si una matriz admite inversa, la inversa es única. Dar un ejemplo de matriz de 2×2 no nula que no admita inversa. Determinar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

66. Analizar la compatibilidad del siguiente sistema para los distintos valores de k.

$$\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \\ x + 2y + kz = 1 \end{cases}$$

67. Sea A una matriz de orden $3x3$. Demostrar que el determinante de A es igual al determinante de A^t.

68. Determinar usando determinantes la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

69. a) Enuncie el Teorema de Rouche Frobenius.

b) Sea el sistema:

$$\begin{cases} x & - & y & + & 4z & = & a \\ 2x & + & y & + & z & = & b \\ 3x & & & + & 5z & = & c \end{cases}$$

i) Estudiar la compatibilidad del sistema para los distintos valores de a, b y c.

ii)Resolver el sistema homogeneo asociado.

70. Sea el sistema:

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & kz & = & 1 \\ 2x & + & ky & + & 8z & = & 3 \end{cases}$$

i) Estudiar la compatibilidad del sistema para los distintos valores de k y en cada caso dar el conjunto solución.

ii)Probar que el conjunto solución del sistema homogéneo asociado es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y hallar una base del mismo.

71. Probar que las matrices A de $\mathbb{R}^{2x2}$ tales que $a_{11} + a_{22} = 0$ forman un subespacio de $\mathbb{R}^{2x2}$. Hallar una base y dimensión de este subespacio.

72. Sea el sistema:

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 8z & = & 3 \\ x & + & 5y & - & 5z & = & 0 \end{cases}$$

i) Estudiar la compatibilidad del sistema. Si es compatible dar el conjunto solución.

ii)Probar que el conjunto solución del sistema homogéneo asociado es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y hallar una base del mismo.

73. Determinar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y hallar una matriz B de orden 3 tal que $A.B.A = I$ donde I es la identidad de orden 3. ¿ La matríz B es única?

74. Sean v_0, v_1 y v_3 vectores de un $\mathbb{K}$- espacio vectorial. Demostrar que si w es una combinación lineal de v_0, v_1 y v_3 entonces $\{v_0, v_1, v_2, w\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependientes.

75. Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema para las distintas ternas (a, b, c).

$$\begin{cases} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ ax & + & by & + & cz & = & 0 \end{cases}$$

76. Hallar una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $(1, 1, 1)$ y $(2, 1, 3)$.

77. Hallar una base del $\mathbb{C}$-subespacio vectorial de $\mathbb{C}^4$ formado por los elementos (z_1, z_2, z_3, z_4) tales que $z_1 = z_2$ y $z_3 + z_4 = 0$.

78. a) Considerando $V = \mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ¿ Es $S = \mathbb{R}$ un subespacio? Justificar.

    b) Considerando $V = \mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial. ¿ Es $S = \mathbb{R}$ un subespacio? Justificar.

    En el caso en que la respuesta haya sido afirmativa dar una base de S.

79. Sean $v = (1, 1, 2)$, $w = (1, -1, 2)$ y $u = (0, 1, 0)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Determinar si existe un subespacio de dimensión 1 que contenga a v y a w. ¿Y un subespacio de dimensión 2?

    ¿Existe un subespacio de dimensión 2 que contenga a u, v y w? ¿Existe un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$ que contenga a v, w y a $(1, 1, 1)$?

80. a)Sea $V = \mathbb{R}^4$ considerado como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Hallar una base y determinar la dimensión del subespacio $S = S_1 + S_2$ donde

$$S_1 = \overline{\{(1, -1, 0, 0); (0, 1, -1, 0)\}} \text{ y } S_2 = \overline{\{(0, 0, 1, -1), (1, 0, 0, -1)\}}.$$

    b) ¿Se puede escribir $S = S_1 \bigoplus S_2$? Determinar, si existe, un $v \neq \overline{0}$ tal que $v \in S_1 \cap S_2$.