Introducción a la filosofía exacta de la ciencia
Versión muy preliminar

Héctor Vucetich

9 de agosto de 1999

Parte I

Lógica

Capítulo 1

Lenguaje

El lenguaje es una herramienta esencial tanto para el desarrollo de la ciencia como para las demás actividades culturales. Tanto es así que toda una escuela de filosofía, encabezada por Wittgenstein [143], considera que el único objeto de la filosofía es el análisis del lenguaje, en particular del lenguaje natural. Así pues, una breve discusión del lenguaje es indispensable en un curso de filosofía.

Comenzaremos por una discusión informal de los lenguajes naturales y luego introduciremos brevemente las herramientas formales para el análisis del lenguaje.

1.1 Lenguaje natural

Comenzaremos analizando el *lenguaje natural*: lenguas tales como el castellano o el inglés, que se pueden utilizar para el desarrollo o el análisis de la ciencia. Estos lenguajes son sumamente poderosos: de hecho, una gran parte de la ciencia, de la matemática a la química, se hace utilizándolos en forma auxiliar (como metalenguajes) y otra gran parte de la ciencia los utiliza casi exclusivamente, aunque ampliándolos con un rico vocabulario especializado. Sin embargo, aquí argumentaremos que el lenguaje natural no es el más apropiado para desarrollar la ciencia, cuyas teorías exigen exactitud, ni tampoco una filosofía exacta de la ciencia.

1.1.1 Bases fisiológicas

El hombre tiene en la corteza cerebral del hemisferio izquierdo varias estructuras especializadas en el análisis del lenguaje [104, 63]: el *área de Broca* (encima y al comienzo de la cisura de Silvio) y el *área de Wernicke* (debajo y hacia el final de la cisura de Silvio) y que están conectadas entre sí por el *fascículo arcuato*. (Fig. 1.1.1). También la *circunvolución angular* (al final de la cisura de Silvio) está relacionada con las funciones lingüísticas del cerebro. Lesiones en estas áreas producen *afasias*: dificultades para la formación o compresnsión del lenguaje. En menor medida, el hemisferio derecho también participa en el procesamiento lingüístico.

Al parecer, estas estructuras están organizadas en forma de *módulos* funcionales autónomos, interconectados de manera compleja (e.g. [65]). Cada módulo se activa con un tipo particular de estímulo y realiza un único tipo de tarea. Cada módulo funcional corresponde a una estructura neurológica dada en la corteza cerebral, de modo que existe un *isomorfismo* entre una parte de la corteza cerebral y la organización funcional lingüística de la mente.

El lenguaje natural tiene varios tipos de estructura que deben tenerse en cuanta para su análisis:

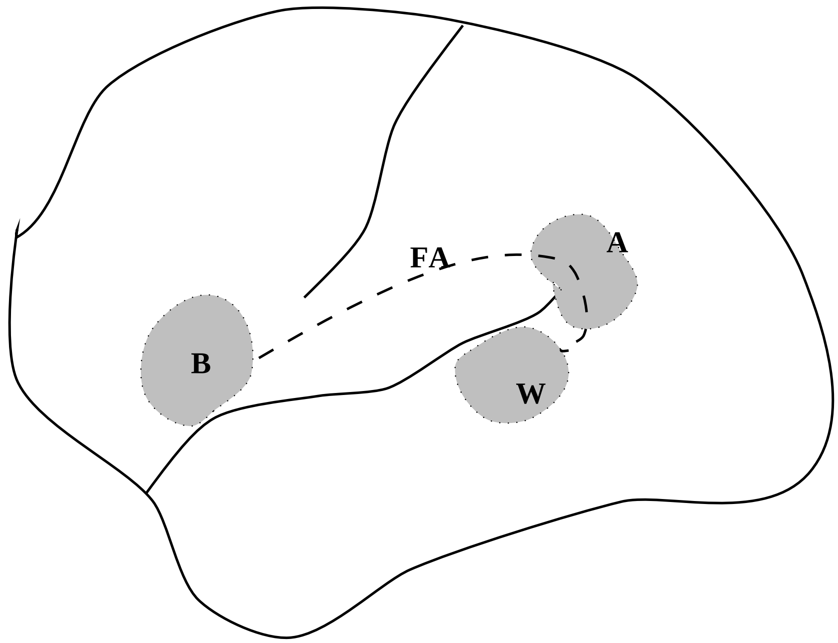


Figura 1.1: Esquema del cerebro izquierdo. **B**: Área de Broca; **W**: Área de Wernicke; **A**: Circunvolución angular; **FA**: fascículo arcuato.

Sintáctica: El lenguaje natural tiene una estructura *formal* que describe la correcta combinación de sus elementos. Por ejemplo, la conjugación del verbo *amar* o la construcción de una oración simple se hacen, en castellano, con cieras reglas gramaticales que dicen cuál es su forma correcta. Esta estructura formal se llama la *sintaxis* del lenguaje. Por lo general, la sintaxis se adquiere en la infancia, principalmente a través del ejemplo. El área de Broca está conectada con el análisis sintáctico del lenguaje, pues las lesiones de la misma provocan dificultades en la construcción de estructuras lingüísticas, aunque no en la comprensión del lenguaje.

Semántica: La sintaxis sólo describe la forma correcta del lenguaje. El *significado* de la misma se analiza con la *semántica*, que establece la conexión entre las formas ligüísticas y un conjunto de objetos. La unidad semántica básica, en el lenguaje natural, es la palabra, cuyo significado se establece con un *diccionario*. Al parecer, alguna forma de diccionario básico se establece en el cerebro desde la infancia con el sencillo mecanismo de la *ostensión*: mostrar un objeto (por ejemplo, con el dedo) y pronunciar su nombre. El significado de una oración o de estructuras más complejas del lenguaje, se establece no sólo combinando los significados de las palabras individuales sino por reglas contextuales, más oscuras, que involucran todo el discurso. Advirtamos que no todas las palabras tienen significado: las palabras *sincategoremáticas* tales como las conjunciones, carecen de significado propio.

El análisis semántico en el cerebro se realiza, al parecer, en el área de Wernicke, pues las lesiones originan afasias donde se pierde la capacidad de comprender el texto, pero no la de su construcción correcta.

Pragmática: Finalmente, el lenguaje es capaz de originar reacciones emocionales o físicas en una persona. El hemisferio derecho del cerebro juega un papel importante en estos procesos. La *pragmática* estudia esta conexión entre el lenguaje y el oyente individual. El despertar emociones a través del lenguaje es característico de la poesía; como en este Rubaí de Omar Khayyam [83]:

Lámparas que se apagan,
esperanzas que se encienden, la Aurora.
Lámparas que se encienden,
esperanzas que se apagan, la Noche.

donde el poeta ha jugado con el significado de las palabras para transmitir desesperanza. También se puede utilizar la estructura fonética del lenguaje para despertar emociones:

Música porque sí, música vana
como la vana música del grillo,
mi corazón eglógico y sencillo
se ha despertado grillo esta mañana

También la propaganda política:

Los argentinos somos derechos y humanos

es una excelente muestra de desvergüenza política y aprovechamiento eficiente de la pragmática castellana.

1.1.2 Lengua y habla

Hasta el momento, hemos discutido brevemente el lenguaje desde el punto de vista del individuo. Pero el lenguaje es una poderosa herramienta de comunicación en una sociedad: con él se transmiten inquietudes, ideas, órdenes y emociones. De Euclides a Einstein, de Shakespeare a Neruda, de Pericles a Menem, todos han utilizado el lenguaje natural como instrumento de comunicación.

Así, es necesario establecer una distinción importante entre *lengua* y *habla* (*langue* et *parole*) [46]. Esta última palabra designa al uso individual del lenguaje, mientras que la primera designa una entidad abstracta: lo que tienen en común las hablas individuales. Los libros de gramática y los diccionarios se ocupan de la lengua mientras que las grabaciones de Catita o Neruda del habla. La pragmática de un lenguaje estudia aspectos generales del habla, mientras que su sintaxis y semántica se refieren principalmente a la lengua.

Para el desarrollo de una filosofía de la ciencia, importa el lenguaje como instrumento de comunicación de ideas entre los miembros de una sociedad. Necesitamos, pues, estudiar la lengua y no el habla ya que sólo a través de la primera es posible la transmisión de ideas.

1.2 Lenguaje y metalenguaje

Antes de comenzar el análisis del lenguaje en general, comencemos introduciendo una noción muy importante: la de *metalenguaje*. En efecto: el análisis de un lenguaje $\mathcal{L}$ debe hacerse introduciendo otro lenguaje $\mathcal{L}'$, llamado el metalenguaje de $\mathcal{L}$.

1.2.1 La paradoja de Grelling

La necesidad de introducir un metalenguaje puede mostrarse construyendo una paradoja al analizar el castellano dentro del castellano mismo [114].

- Los adjetivos castellanos pueden clasificarse en dos grandes grupos: aquellos cuyo significado se aplica al propio adjetivo (llamados adjetivos *autológicos*) y aquellos cuyo significado *no* se aplica al mismo adjetivo (llamados adjetivos *heterológicos*).

  Por ejemplo, *"castellano"* y *"polisílabo"* son adjetivos autológicos mientras que *"inglés"* y *"monosílabo"* son heterológicos.

  Ejercicio 1.1.
  Clasificar los siguientes adjetivos como autológicos o heterológicos.

corto	largo
rojo	negro
calificativo	demostrativo

  Consideremos ahora el adjetivo "heterológico". Si "heterológico" fuera heterológico, su significado no se aplicaría a sí mismo y por lo tanto sería autológico (ya que lo contrario de heterológico es autológico). En cambio, si "heterológico" fuera autológico su significado se aplicaría a sí mismo y sería heterológico. De cualquier manera, hemos construído una contradicción lógica.

En la demostración anterior hemos distinguido cuidadosamente entre *uso* y *mención* de un símbolo: *usamos* la palabra *heterológico* en el texto como adjetivo y la *mencionamos* escribiéndola entre comillas *"heterológico"*. La distinción entre uso y mención de un símbolo es indispensable para evitar falacias como la que hay en el siguiente "razonamiento":

Ejemplo 1.1.

> Ningún gato tiene ocho colas
> Todo gato tiene una cola más que ningún gato
> $\therefore$
> Todo gato tiene nueve colas

Ejercicio 1.2.
Analizar el "razonamiento" anterior.

Volvamos a la paradoja de Grelling. Con la introducción del metalenguaje, la paradoja desaparece. Repitamos el razonamiento anterior, pero ahora usaremos la convención siguiente: los símbolos mencionados pertenecen al *lenguaje objeto*: el que se analiza, mientras que el resto del texto pertenece al metalenguaje. Ahora, el razonamiento que llevó a una contradicción no es más válido: el adjetivo mencionado pertenece al lenguaje, el usado al metalenguaje y la locución *adjetivo cuyo significado* no *se aplica al mismo adjetivo* no tiene sentido: se menciona en el lenguaje y se usa en el metalenguaje.

1.2.2 Paradoja del mentiroso (o de Epiménides)

Paradojas similares a la de Grelling aparecen cuando se intenta analizar la noción de verdad en el lenguaje objeto [114].

- Esta paradoja clásica (mencionada por San Pablo; Tito: 1, 12) ha originado volúmenes de interpretación.

  Consideremos la afirmación:

  $$\text{Esta oración es falsa} \tag{1.1}$$

  La oración (1.1) afirma su propia falsedad y por lo tanto conduce a una contradicción.

Ejercicio 1.3.
Mostrar explícitamente la paradoja generada por la oración (1.1).

Pero la formulación (1.1) es ambigua, porque el adjetivo demostrativo "esta" lo es. Se puede hallar una formulación de la paradoja sin ambigüedades si lo reemplazamos por una cita de la misma oración entre comillas. Con un poco de cuidado se llega a la formulación:

$$\begin{array}{c}\text{“Es falsa si se aplica a sí misma”} \\ \text{Es falsa si se aplica a sí misma}\end{array} \tag{1.2}$$

Esta oración es indudablemente falsa si es verdadera y verdadera si es falsa

Nuevamente, la introducción del metalenguaje permite resolver la paradoja. Pero ahora debemos distinguir varias clases de verdad. En primer lugar, tenemos la verdad a nivel del lenguaje objeto, que podemos indicar, por ejemplo, con un subíndice cero: "verdadero$_0$". Además tenemos la noción de verdad en el metalenguaje, que indicaremos con un subíndice uno: "verdadero$_1$". Si utilizamos la convención de mencionar el lenguaje objeto y usar en el metalenguaje, la ecuación (1.2) se escribe:

$$\begin{array}{c}\text{“Es falsa}_0\text{ si se aplica a sí misma”} \\ \text{Es falsa}_1\text{ si se aplica a sí misma}\end{array} \tag{1.3}$$

y esta ecuación ya no es paradójica: es falsa$_1$.

1.2.3 La jerarquía de lenguajes

En algunos problemas es necesario analizar el metalenguaje y, por supuesto, eso se hace en el *meta-metalenguaje* para evitar paradojas análogas a las anteriores. Basta un momento de reflexión para ver que existe una jerarquía infinita de lenguajes $\mathcal{L}_n$, encabezada por el lenguaje objeto $\mathcal{L}_0$. Dentro de cada $\mathcal{L}_{n>0}$ puede introducirse la noción de verdad para $\mathcal{L}_{n-1}$ y, en general, llevar a cabo el análisis semántico del mismo.

Históricamente, la noción de metalenguaje fue introducida por Hilbert y su escuela, quienes le impusieron severas restricciones con el fin de analizar la lógica y la matemática. Como uno de los objetos de este curso es examinar *teorías factuales* (que se refieren al mundo real) no introduciremos tales restricciones. Tanto nuestro lenguaje objeto como sus metalenguajes serán muy ricos, tanto como fuere necesario para analizar el mundo real.

1.3 Estructuras lógicas del lenguaje natural

El lenguaje natural tiene una rica variedad de estructuras que facilitan la comunicación. Examinemos, en esta sección, algunas de las más importantes entre ellas. Utilizaremos el castellano como metalenguaje, teniendo cuidado en disitnguir entre uso y mención de un símbolo. La descripción que sigue refleja, principalmente, las estructuras de lenguas romances, evolucionadas a partir del latín: castellano, portugués, francés, inglés ...

1.3.1 Concatenación

Tal vez al característica más importante sea la de poder construir larguísimas estructuras a partir de unos pocos elementos básicos. Consideremos, por ejemplo, el castellano escrito: cualquier texto castellano, desde el resumen periodístico de un crimen hasta el "Quijote", está basado sobre combinaciones de menos de cien símbolos: las letras mayúsculas y minúsculas (unas ochenta si se incluyen las vocales acentuadas y cremadas como letras distintas) y una veintena de signos de puntuación. Algo parecido ocurre con el lenguaje hablado: la composición de un centenar de fonemas (incluyendo, por ejemplo, los "silencios singnificativos") es capaz de expresar desde un discurso de Menem hasta la poesía de "Bodas de Sangre".

Esta prodigiosa capacidad de expresión se debe a un número pequeño de estructuras básicas. La principal de ellas es la capacidad de *concatenar* los elementos básicos del lenguaje para formar estructuras más complejas. Por ejemplo, la sencilla oración:

$$\text{“El gato comió un ratón”} \tag{1.4}$$

se obtiene concatenado las letras {'E'|'l'|' '|'g'|...} en un orden determinado.

La concatenación tiene ciertas propiedades sencillas, que le otorgan, como veremos, una estructura matemática. En primer lugar, observemos que el orden en que se concatenan los elementos es importante: muchas claves criptográficas sencillas permutan el orden de las letras de un mensaje para hacerlo incomprensible[1]. Por otra parte, la forma en que se asocien los elementos es irrelevante: la oración (1.4) puede construirse concatenado

"El gato" *y* "comió un ratón"

o también:

"El gato comió" *y* "un ratón"

En ambos casos, la oración resultante es (1.4).

En cambio, no existe en general una manera de volver atrás con lo dicho en el lenguaje, como lo han aprendido, dolorosamente, muchos políticos: no hay manera de borrar una frase desdichada. La operación de concatenación no tiene, por lo general, una operación inversa[2].

1.3.2 Gramática

La concatencación de estos elementos no es arbitraria: la forma en que la concatenación es posible depende de un conjunto de *reglas gramaticales*, características de cada lenguaje. Este conjunto de reglas definen la *sintaxis* de cada lenguaje.

Así, por ejemplo, en castellano existen reglas de distinto tipo que definen su sintaxis. Algunos ejemplo sencillos de estas reglas son:

Ortográficas: *Delante de* b *o* p *se escribe* m.
Se escriben con acento ortográfico las palabras agudas terminadas en vocal, n *o* s.

Morfológicas: *El plural de una palabra terminada en vocal se forma añadiendo una* s *a la forma singular.*
El imperativo de un verbo en singular se obtiene suprimiendo la r *del infinitivo.*

"Sintácticas": *Cuando el verbo se refiere a un único sujeto, concuerda con él en número y persona. Se usa el modo subjuntivo cuando el verbo expresa una acción dudosa, posible, necesaria o deseada.*

[1] El "vesre" porteño, que altera el orden de los fonemas, fue originalmente, una clave críptica oral entre los presos de las cárceles de Buenos Aires.

[2] Esto vale también para el lenguaje escrito: a veces es posoble borrar y corregir (como el escritor que trabaja lentamente en su casa) pero si usted envió una carta insultante y se arrepiente ...

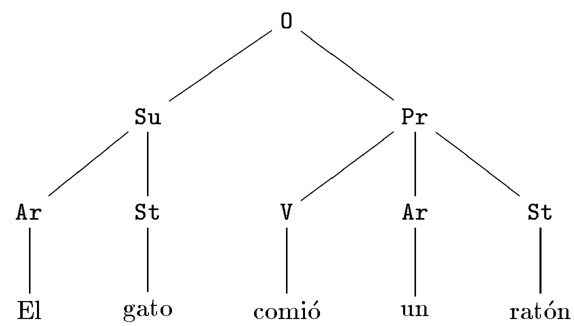


Figura 1.2: Árbol sintáctico en castellano. Las estructuras sintácticas se expresan en una notación abreviada: **s**, sustantivo; etc

Las reglas gramaticales del castellano se originaron en un complejo proceso evolutivo, que duró alrededor de mil años. No es extraño, pues, que su formulación sea imprecisa y llena de excepciones. En la sección 1.5 discutiremos con más precisión lenguajes libres de estas ambigüedades.

1.3.3 Árboles y análisis sintáctico

Las orqaciones en castellano (y en las demás lenguas indoeuropeas) son las estructuras complejas sobre las que se basa el discurso. Cada texto castellano puede ser considerado una única oración compleja, formada por yuxtaposición, coordinación y subordinación de oraciones más simples.

La estructura de una oración dada se analiza separándola en estructuras sintácticas más sencillas. Por ejemplo, la oración (1.4) puede analizarse de la siguiente manera:

$$\textbf{sujeto} \qquad \textbf{predicado} \tag{1.5}$$

$$\overbrace{\text{El gato}} \qquad \overbrace{\text{comió un ratón}} \tag{1.6}$$

A su vez, el sujeto puede analizarse en elementos sintácticos más simples:

$$\textbf{artículo} \qquad \textbf{sustantivo} \tag{1.7}$$

$$\overbrace{\text{El}} \qquad \overbrace{\text{gato}} \tag{1.8}$$

Este procedimiento puede generalizarse: cada estructura puede analizarse en otras más pequeñas y éstas, a su vez, en estructuras más sencillas, hasta llegar a las más simples de todas: letras (en el lenguaje escrito) o fonemas (en el oral). El análisis puede representarse en la forma de un *árbol*, tal como el gráfico de la figura 1.2, donde el análisis (muy simplificado) se detiene al nivel de palabras.

La estructura de árbol es tan importante y aparece en tantos problemas de ciencia y filosofía que vale la pena dar una definición formal de la misma.

Definición 1.1 (Árbol).
Un conjunto T de elementos (llamados *nudos*) es un árbol si

1. Existe un nodo particular, llamado la *raíz* del árbol y designado como raiz(T).

2. Los demás nodos están subdivididos en $m > 0$ subconjuntos $T_1, \ldots, T_m$ y cada uno de ellos es un árbol. Los árboles T_i se llaman los *subárboles* de T.

Esta es una elegante *definición recursiva*: el ente definido entra en la definición, pero teniendo cuidado de no formar un círculo vicioso. La primera condición garantiza que sabemos lo que es un árbol en un caso particular: cuando está formado por un único nodo. En el segundo paso, completamos la defnición aclarando que el resto de los nodos están distribuidos también en forma de árboles. Es fácil ver que el análisis gramatical de la figura 1.2 satisface esta definición.

Del mismo modo, definiremos recursivamente la igualdad de dos árboles:

Definición 1.2 (Igualdad de árboles).
Dos árboles T y T' son iguales si:

1. Sus raíces son iguales:

$$\operatorname{raiz} T = \operatorname{raiz} T'$$

2. Todos sus subárboles son iguales:

$$T_i = T_i'$$

   para todo i.

Las aplicaciones de los árboles son innumerables y veremos muchas de ellas más adelante.

Ejemplo 1.2 (Expresiones algebraicas).
Una aplicación importante es la elucidación de las reglas de prioridad para la evaluación de expresiones algebraicas:

1. Evalúe primero las operaciones indicadas entre paréntesis.
2. Dentro de cada paréntesis, efectúe primero las multiplicaciones y divisiones y luego las sumas y restas.

La figura 1.3 muestra la estructura de la expresión:

$$a + b(c/d - ef)$$

en forma de árbol. La evaluación se hace desde las hojas hacia la raíz.

1.3.4 Elementos semánticos

Un lenguaje natural posee la capacidad de describir o analizar el mundo real o mundos imaginarios y de comunicar estas descripciones. Se logra esto a través de un complejo sistema semántico, que asigna nombres a determinados objetos y les atribuye propiedades o acciones. Las lenguas indoeuropeas tienen estructuras especializadas para esas tareas, conocidas como *las partes de la oración*. Son estas estructuras las portadoras del carácter lógico del lenguaje: su capacidad para expresar afirnaciones acerca de la realidad. Examinemos brevemente el papel lógico de estas esctructuras lingüísticas.

Sustantivos: Estas palabras asignan nombres a determinados objetos. Los sustantivos *comunes* como "perro" o "número" designan a una clase de objetos determinada, mientras que los sustantivos propios, como "Batuque" o π designan a un individuo determinado de esa clase.

Adjetivos: Atribuyen determinadas propiedades a un sustantivo: "perro salchicha" o "número irracional". Las reglas gramaticales de las lenguas indoeuropeas permiten utilizar estas *frases sustantivas* reemplazando al sustantivo.

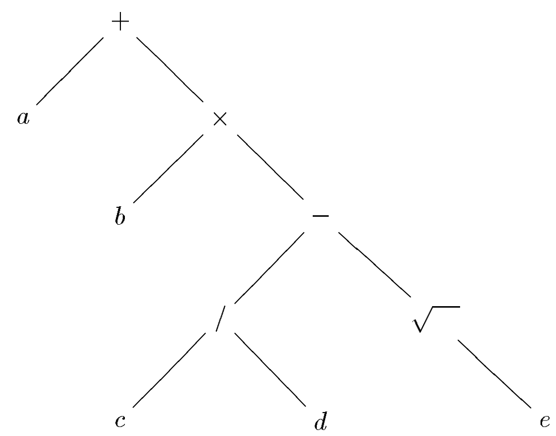


Figura 1.3: Árbol de una expresión algebraica. Los nodos indican el operador algebraico y las hojas las variables y constantes de la expresión.

Verbos: Establecen una conexión entre un sustantivo y un adjetivo (verbos *copulativos*) o entre dos sustantivos (verbos *activos*). La oración "El perro está gordo" atribuye la propiedad de gordura a *ese* perro determinado, mientras que el ejemplo (1.4) establece la relación de predador-presa entre *ese* gato y *algún* ratón.

Artículos: Los artículos señalan (o seleccionan) a un objeto entre un conjunto de ellos. El artículo determinado "el" selecciona un objeto dado de un conjuto de objetos (por ejemplo "El primer presidente argentino" denota a una única persona: Rivadavia) mientras que el artículo indeterminado "un" designa a algún objeto impreciso de un conjuto de objetos (por ejemplo "Un presidente honesto" designa a alguna persona que haya ocupado el cargo, tal vez inexistente).

Conjunciones, etc: Las conjunciones y otras partículas del lenguaje permiten formar oraciones complejas a partir de elementos simples. Un ejemplo sencillo es: "El gato comió un ratón y después durmió la siesta", donde la conjunción *y* y el adverbio *después* establecen una relación lógica y semántica entre las dos oraciones.

1.3.5 Estructura semántica de la oración

Examinemos muy brevemente la estructura semántica de la oración castellana simple [49].

Declarativas: Estas oraciones (también llamadas *enunciativas* o *aseverativas*) enuncian afirmaciones o negaciones: enunciados a los que puede atribuirse un valor de verdad. Como veremos, son las oraciones lógicamente significativas y a ellas debe recurrirse para analizar la estructura lógica de la realidad.

Ejemplo 1.3.
Oraciones declarativas típicas en ciencia:

- "Los quarks tienen carga fraccionaria".
- "El hierro tiene valencia 2 ó 3".
- "La reproducción sexual es característica de los eucariotas".

Interrogativas: Estas oraciones enuncian un problema: una duda o declaración de ignorancia, cuya respuesta debe ser alguna oración declarativa.

Ejemplo 1.4.
Oraciones interrogativas en ciencia:

- "¿Cuál es la clase más general de ecuaciones diferenciales integrables?".
- "¿Qué mecanismo produce la superconductividad de alta temperatura?".
- "¿Cuál es el mecanismo fisiológico detrás de la memoria?".

Exhortativas: Estas oraciones expresan reglas de conducta y son, por lo tanto, importantes en ética. Los problemas puden, a veces, expresarse como oraciones exhortativas:

Ejemplo 1.5.

- "Clasifique todos los grupos finitos".
- "Halle un proceso capaz de bloquear la proliferación celular en el cáncer de cérvix".

Estas oraciones, sin embargo, se formulan mejor en ciencia como interrogaciones.

Otras oraciones: Las oraciones de posibilidad, dubitativas y desiderativas son grandes generadoras de contextos indirectos que, como veremos, pueden alterar los valores de verdad de un enunciado. Su naturaleza es, pues, esencialmente pragmética, así como las oraciones exclamativas.

1.4 Dificultades del lenguaje natural

La lengua está sujeta a un proceso evolutivo, cuyo mecanismo es complejo pero indudable: el castellano de Cervantes o el inglés de Shakespeare son distintos de las respectivas lenguas modernas. La generalización de la lectura ha retardado pero no ha detenido este proceso evolutivo. No es de extrañar, pues, que el lenguaje natural tenga muchas estructuras irracionales, muchas excepciones a las reglas y una gran carga de ambigüedad que lo hacen inconveniente para el desarrollo de una filosofía exacta. De eso nos ocuparemos en lo que sigue.

El lenguaje natural tiene muchos inconvenientes muy serios como instrumento de comunicación: es ambiguo, impreciso y oblicuo.

Ambigüedad: Una oración en un lenguaje cualquiera es *ambigua* si admite dos análisis gramaticales con árboles diferentes. En los lenguajes naturales, distintos roles gramaticales de una misma palabra puede dar origen a ambigüedades.

Ejemplo 1.6.
Un ejemplo sencillo en castellano es

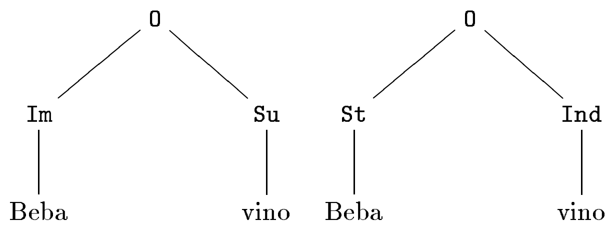
"Beba vino" (1.9)

Esta oración puede tener (al menos) dos análisis gramaticales diferentes, mostrados en la figura 1.4. En la subfigura 1.4(a) se analiza (1.9) en una forma imperativa, tal como en la oración:

"Beba vino: la bebida de los pueblos fuertes".

mientras que en la subfigura 1.4(b) se analiza como una oración declarativa:

"Mi prima *Beba vino* a visitarnos".



(a) Imperativa (b) Declarativa

Figura 1.4: Dos árboles sintácticos diferentes para la misma oración

Ejemplo 1.7.
Un ejemplo clásico, en inglés, es el siguiente:

$$\text{“The lady scientist made the robot fast while she ate”} \tag{1.10}$$

La palabra *fast* es un verbo en infinitivo (*ayunar*) o un adverbio (*rápido*).

Ejercicio 1.4.
Dibujar los árboles sintácticos del ejemplo anterior.

Imprecisión: El lenguaje natural permite construir oraciones sintácticamente correctas pero carentes de significado, tal como *La nada nadea* (Heidegger). Llamaremos *imprecisión* a estas ambigüedades de carácter semántico.

Ejemplo 1.8.
El castellano puede originar imprecisiones gracias a su capacidad de usar el sujeto tácito:

$$\text{“¡Síganme, *! No los voy a defraudar”} \tag{1.11}$$

El asterisco marca un lugar que puede llenarse de distinta manera; por ejemplo: *“jubilados”* o *“ñoquis”*, ambos con distinto significado.

Un problema mucho más complejo y difícil de resolver lo proporciona la siguiente oración:

Ejemplo 1.9.

$$\text{“El actual rey de Francia es calvo”} \tag{1.12}$$

La oración anterior es *aseverativa*: Afirma una característica del *“actual rey de Francia”* y por lo tanto debe ser verdadera o falsa. Y sin embargo, ¡Francia actualmente no tiene reyes! ¿Qué significa entonces esa aseveración? ¿Tiene sentido afirmar la calvicie de un ser inexistente? El lenguaje natural no puede resolver limpiamente ese problema, que ha hecho correr ríos de tinta desde que lo enunció Bertrand Russell.

Oblicuidad: Una dificultad aún más grave del lenguaje natural es la existencia de *contextos indirectos u oblicuos*, que no respetan la verdad o falsedad de una afirmación. Un ejemplo es el siguiente:

Ejemplo 1.10.
En todos los países civilizados, quien gana más dinero paga más impuestos. Así, pues, tenemos la equivalencia:

$$\text{“ganar mucho dinero”} \Leftrightarrow \text{“pagar muchos impuestos”} \tag{1.13}$$

en el sentido de que ambas aseveraciones son verdaderas o falsas a la vez. Sin embargo:

$$\text{“Me gusta ganar mucho dinero”} \not\Leftrightarrow \text{“Me gusta pagar muchos impuestos”} \tag{1.14}$$

(excepto, por supuesto, en el caso de grandes masoquistas).

Al introducir frases lógicamente equivalentes en contextos indirectos (encabezados por *“quiero”, “me gusta”, “parece que”*, etc.) cambia el significado y se pierde la equivalencia lógica. Los contextos indirectos son un dolor de cabeza para el filósofo (y el lógico) y su manejo adecuado es un problema aun no resuelto.

En resumen, aunque un poderosísimo instrumento de comunicación, el lenguaje natural tiene graves inconvenientes para el desarrollo de una filosofía exacta: es ambiguo, incompleto y oblicuo. En las secciones siguientes discutiremos como alternativas lenguajes artificiales que, aunque mucho menos expresivos que el lenguaje natural, tienen bajo control los inconvenientes anteriores.

1.5 Lenguaje formal

Nuestro propósito en lo que sigue es elucidar las *propiedades formales* de un lenguaje. A partir de este análisis podremos definir lenguajes sin contextos oblicuos u otras ambigüedades [117, 127].

1.5.1 La concatenación

Comencemos por precisar la operación de concatenación de símbolos, y para ello, debemos precisas qué es lo que se concatena.

Definición 1.3 (Alfabeto y palabra).
Sea V_T un conjunto finito de símbolos llamado el *alfabeto terminal* de $\mathcal{L}$. Por ejemplo, para el inglés:

$$V_T = \{\text{A-Z}\} \cup \{\text{a-z}\} \cup \{.\} \cup \ldots$$

y en la Biblioteca de Babel [12, p. 466]:

$$V_T = \{\text{a-z}\} \cup \{., \Box\} \tag{1.15}$$

en donde el último símbolo representa el espacio en blanco. Una *palabra* (u *oración*) es una secuencia de símbolos pertenecientes a V_T:

$$w = \{a_i \mid a_i \in V_T; i \in [1-N]\} \tag{1.16}$$

También es conveniente introducir la *palabra vacía* λ, que tiene cero símbolos. El conjunto de todas las palabras es $W(V_T)$.

Nota 1.1.
En realidad, no hay inconveniente en tomar palabras enteras de algún alfabeto auxiliar como alfabeto terminal de un lenguaje, y en algunos ejemplos lo haremos.

Ahora estamos en condiciones de definir la concatenación:

Definición 1.4.
Dadas $w_1 = \{a_i \mid i \in [1, n_1]\}$ y $w_2 = \{b_j \mid j \in [1, n_2]\}$, la concatenación $w_3 = w_1 \circ w_2$ es:

$$w_3 = \{c_k \mid k \in [1, n_1 + n_2]\}$$

en donde:

$$c_k = \begin{cases} a_k & k \in [1, n_1] \\ b_{k-n_1} & k \in [n_1 + 1, n_2] \end{cases}$$

Por lo general, omitiremos el símbolo $\circ$, indicando la concatenación de dos palabras con la yuxtaposición. Introduzcamos ahora la definición de una importante estructura algebraica:

Definición 1.5 (Monoide).
Un triplete $\langle M, \star, \square \rangle$ se llama *monoide* si se cumple:

1. $\star$ es una operación binaria $M \times M \to M$, indicada como $a \star b$.

2. $\star$ es asociativa:

$$(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

3. $\square$ es un *elemento neutro* o *elemento unidad* para $\star$:

$$\square \star a = a \star \square = a$$

Teorema 1.1 (Estructura de monoide).
El conjunto $\langle W_T, \circ, \lambda \rangle$ es un monoide.

El monoide W_T es el conjunto de todas las posibles secuencias de símbolos. Podemos llamar a ese lenguaje el “Babelio”, pues protagoniza “La biblioteca de Babel” [12, p. 470]:

> No puedo combinar unos caracteres
>
> *dhcmrlchtdj*
>
> que la divina Biblioteca no haya previsto y que en alguna de sus lenguas secretas no encierren un terrible sentido.

Pero para hacer ciencia, el Babelio no es suficiente: de la inmensa Biblioteca debemos quedarnos sólo con aquellas palabras que tengan una estructura escrutable. Para ello, en necesario definir una gramática.

1.5.2 Gramática

Nuestra siguente etapa es definir con precisión la noción de gramática. Para formalizarla, además del monoide $W(V_T)$ necesitaremos otros elementos auxiliares:

V_N: Un conjunto de símbolos llamado el *alfabeto auxiliar* (o *alfabeto no terminal*). El alfabeto auxiliar contiene símbolos pertenecientes al etalenguaje, necesarios para el análisis gramatical. En idiomas como el castellano, el alfabeto auxiliar contiene símbolos tales como `sujeto`, `predicado`, `sustantivo`, `verbo`, etc.

X_0: La *letra* (o *símbolo*) *inicial* es un elemento de $X_0 \in V_N$. En castellano, por ejemplo, puede ser `texto` u `oracion`.

F: Un conjunto de *reglas gramaticales*, que permite el análisis sintáctico. Estas reglas, llamadas *producciones* son pares ordenados de secuencias de símbolos del alfabeto total:

$$V = V_T \cup V_N \tag{1.17}$$

denotadas en la forma:

$$P \mapsto Q \tag{1.18}$$

en donde P contiene al menos una letra de V_N.

Definición 1.6 (Gramática generativa).
La cuadrupleta ordenada $\langle V_T, V_N, X_0, F\rangle$ se llama una *gramática generativa.*

Las gramáticas generativas son la herramienta fundamental para analizar el lenguaje.

1.5.3 Análisis sintáctico formal

Examinemos ahora, de manera somera, la noción de análisis sintáctico formal. Ante todo, generalicemos la noción de palabra:

Definición 1.7 (Palabra formal).
Una *palabra sobre un alfabeto* V es una secuencia de símbolos de V.

Definición 1.8 (Generación).
Diremos que una palabra P sobre V *genera directamente* a la palabra Q (denotado como $P \mapsto Q$) si

$$P = P'P_1P" \tag{1.19}$$
$$Q = Q'Q_1Q'' \tag{1.20}$$

y hay una producción $P_1 \mapsto Q_1$ en F. Además, diremos que P *genera* Q ($P \mapsto^* Q$) si existe una secuencia de palabras P_i tales que:

$$P \mapsto P_1 \mapsto P_2 \cdots \mapsto Q \tag{1.21}$$

Por fin, estamos en condiciones de dar una definición formal de oración:

Definición 1.9 (Oración bien formada).
Si $P \in W(V_T) \wedge Q \mapsto P$ diremos que P es una *palabra (u oración) bien formada* de acuerdo con la gramática G.

Finalmente, llegamos a la definición de lenguaje formal:

Definición 1.10 (Lenguaje formal).
El *lenguaje generado por* G, $\mathcal{L}_G$ es el conjunto de oraciones bien formadas generadas por X_0:

$$\mathcal{L}_G = \{P | P \in W(V_T) \wedge X_0 \mapsto^* P\} \tag{1.22}$$

La ecuación (1.22) implica que la estructura del lenguaje $\mathcal{L}$ está determinada por la gramática G. La recíproca no es cierta: distintas gramáticas pueden generar el mismo lenguaje.

V_T	*el* | *un* | *gato* | *ratón* | *comió* | *cazó* | *gordo* | *flaco* | *que*
V_N	**oración** | **sujeto** | **predicado** | **frase-sustantiva** | **frase-adjetiva** | **artículo** | **sustantivo** | **adjetivo** | **verbo** | **conjunción** | **vacía**
X_0	**oración**
F	**oración** → **sujeto predicado** **sujeto** → **frase-sustantiva** **predicado** → **verbo frase adjetiva** **frase-sustantiva** → **artículo sustantivo** | **artículo sustantivo frase adjetiva** **frase-adjetiva** → **vacía** | **adjetivo** **artículo** → *el* | *un* **sustantivo** → *gato* | *ratón* **adjetivo** → *gordo* | *flaco* **verbo** → *comió* | *cazó* **conjunción** → *que*

Tabla 1.1: Gramática del picocastellano

1.5.4 Ejemplos

Comencemos con un ejemplo sencillo de lenguaje: la notación binaria para los números naturales:

Ejemplo 1.11 (Notación binaria).
La siguiente gramática de tipo 3 describe la notación binaria:

V_T: $\{0, 1\}$

V_N: $\{$**número**, **dígito**$\}$

X_0: **número**

F: **número** ↦ **número dígito**
número ↦ **dígito**
dígito ↦ $0 \mid 1$

Hemos usado una variante de la *forma normal de Backus*, que se utiliza para describir gramáticas: el alfabeto auxiliar está escrito en **negritas** mientras que el alfabeto terminal en *itálicas*; el signo | separa diferentes símbolos de los alfabetos y diferentes segundos miembros de las producciones.

La gramática describe un **número** como una sucesión de **dígito**s.

Nuestro ejemplo siguiente es algo más complejo: una porción muy pequeña del castellano. La gramática generativa del picocastellano está escrita en la Tabla 1.1. La lectura de las producciones es simple: la primera, por ejemplo, describe una **oración** como un **sujeto** seguido por (yuxtapuesto a) un **predicado**.

Una vez que se tiene la gramática, la generación de una oración se hace aplicando las producciones una tras otra, eliminando sucesivamente los símbolos del alfabeto auxiliar hasta que sólo queden símbolos del alfabeto terminal. Este proceso puede representarse en forma de árbol, como lo muestra la figura 1.5.

La gramática del picocastellano sólo permite construir oraciones de longitud acotada. Este no es el caso de un lenguaje natural, cuyas oraciones tienen longitud

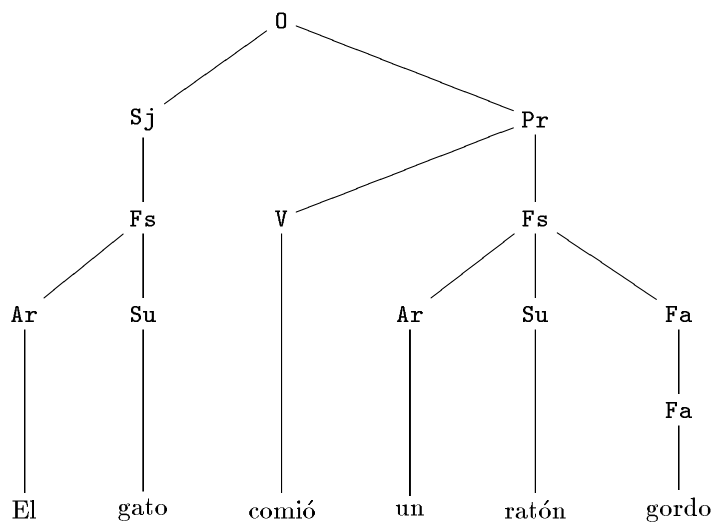


Figura 1.5: Generación de una oración en picocastellano

ilimitada. Sin embargo, es muy sencillo extender el picocastellano a el nanocastellano, que permite construir oraciones de longitud ilimitada. Para ello, utilizaremos *producciones recursivas*, es decir producciones cyuo segundo miembro puede contener referencias a su propio primer miembro. Estas referencias pueden ser directas o indirectas, y en el nanocastellano son indirectas. La modificación consiste en añadir sólo una producción:

$$\textbf{frase-adjetiva} \rightarrow \textbf{conjunción predicado} \tag{1.23}$$

En esta producción, una **frase-adjetiva** puede formarse yuxtaponiendo el símbolo *que* y un **predicado**. Si examinamos el resto de la gramática en la tabla 1.1 veremos que un predicado está formado por un **verbo** seguido de una **frase-adjetiva**. Así, pues, podemos construir oraciones de longitud arbitaria en nanocastellano añadiendo frase adjetiva a frase adjetiva usando la conjunción copulativa "que". Por ejemplo:

$$\begin{aligned} &\text{El gato que cazó un ratón gordo comió el ratón} \\ &\qquad\text{que comió el ratón que cazó un gato flaco} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Con esta gramática el nanocastellano es un leguaje capaz de "hacer uso infinito de medios finitos", en las palabras de von Humboldt.

Ejercicio 1.5 (Enteros decimales).

Hallar una gramática que genere los enteros en notación decimal.

Ejercicio 1.6 (Estructura de paréntesis).

Hallar una gramática que genere las estructuras de paréntesis bien formados.

1.5.5 La jerarquía de lenguajes

El gran lingüista N. Chomski clasificó las gramáticas G y los lenguajes $\mathcal{L}$ que ellas generan de acuerdo con la estructura de las producciones de F.

Definición 1.11 (Chomski).
Una gramática se llama de *tipo* i si las producciones de F satisfacen las siguientes restricciones:

0. Ninguna restricción (Por ejemplo, los lenguajes naturales podrían describirse con estas gramáticas).

1. Cada producción de F tiene la forma

$$Q_1 X Q_2 \mapsto Q_1 P Q_2 \tag{1.25}$$

en donde $Q_1, Q_2 \in W(V)$; $X \in V_N$ y $P \neq \lambda$. Estas gramáticas se llaman *sensibles al contexto*. Intuitivamente, se *permite* el reemplazo de X por P sólo en el contexto $Q_1 \ldots Q_2$. (Por ejemplo: `PL/1`).

2. Cada producción de F tiene la forma:

$$X \mapsto P \tag{1.26}$$

con $X \in V_N$ y $P \in W(V)$. Éstas son las *gramáticas libres de contexto*. Los lenguajes tipo `Pascal` son los ejemplos más típicos de los G_2.

3. Cada producción tiene una de las formas:

$$\begin{aligned} X &\mapsto YP \\ X &\mapsto P \end{aligned} \tag{1.27}$$

donde $X, Y \in V_N$ y $P \in W(V_T)$. Las gramáticas de este tipo se llaman *regulares*. La descripción de los enteros o de las identificadores en un lenguaje de programación se ajusta, por lo regular, a gramáticas regulares. Por ejemplo, la gramática del ejemplo 1.11 es de tipo 3.

Obviamente, cada clase contiene la que le sigue, de modo que $\boldsymbol{\mathcal{L}_0}$ la clase de lenguajes generados por gramáticas de tipo 0, es la más general y $\boldsymbol{\mathcal{L}_3}$, la más restringida.

Ejercicio 1.7.

1. Examinar la descripción de `Pascal` o de `C`. Mostrar segmentos de la gramática de tipo 2 y de tipo 3.

2. Examinar la definición de *expresiones regulares* en `Unix`. Explicar su relación con las gramáticas regulares.

1.6 Autómatas y lenguaje

La noción de *autómata* es importante en muchas ramas de la lógica y la matemática modernas. En realida, la palabra "autómata" se utiliza para designar dos cosas diferentes [127, 95]:

- una descripción idealizada de un aparato físico, (por ejemplo, una computadora o un cerebro humano), capaz de llevar a cabo operaciones lógicas.

- una representación, en términos intuitivos, de una secuencia de operaciones lógicas.

Obviamente, ambas caracterizaciones son las dos caras de una misma moneda.

1.6.1 Autómatas de estados finitos

Los autómatas más sencillos son las *máquinas de estados finitos*:

Definición 1.12 (Autómata de estados finitos).
Un *autómata de estados finitos* es un conjunto de cuatro elementos:

S: Un conjunto finito S de símbolos, llamado el *alfabeto de señales de entrada.*

Q: Un conjunto finito Q de *estados internos* del autómata.

F: Una función $F : S \times Q \to Q$, que a cada par de (estado-simbolo) le asocia un nuevo estado. Esta *función de transición* describe el funcionamiento del autómata.

R: Un conjunto finito R de símbolos, llamado el *alfabeto de señales de salida.*

G: Una función $G : S \times Q \to R$, que a cada par de (estado-simbolo) le asocia un símbolo de salida.

La quintupleta $M = \langle S, Q, F, R, G \rangle$ se llama un autómata de estados finitos.

Esta máquina idealizada funciona de la manera siguiente: supondremos que llega al autómata una sucesión de símbolos de entrada $s_i \in S$. Cada vez que lee un símbolo s_i en el estado q_i el autómata hace dos cosas: emite una señal de salida $r_{i+1} = G(s_i, q_i)$ y pasa a un nuevo estado $q_{i+1} = F(s_i, q_i)$. Eligiendo convenientemente las funciones de transición y salida un autómata puede simular muchas operaciones intelectuales tales como la adición de dos números o el análisis sintáctico de lenguajes sencillos.

Ejemplo 1.12 (Notación binaria).
El siguiente autómata examina una sucesión de símbolos y determina si es un número binario.

S: $\{0, 1, \#\}$

Q: $\{\mathbf{N}, \mathbf{H}\}$

F: Está descripta por la tabla siguiente:

	0	1	#
N	N	N	H
H	H	H	H

El alfabeto R y la función G se pueden elegir de manera conveniente y se dejan como ejercicio.

El autómata recibe una secuencia de ceros y unos terminada por un "`#`". Mientras reciba bits, la máquina permanece en el estado `N` y cuando recibe el signo de fin se detiene en el estado `H`.

Los autómatas finitos pueden interpretar cualquier lenguaje de tipo 3. En efecto, elijamos el alfabeto de entrada del autómata como $S = V_T \cup \#$ y a cada signo del alfabeto auxiliar $n_i \in V_N$ le haremos corresponder un estado interno del autómata $q_i \in Q$. Finalmente, elegiremos la función de transición de modo que reproduzca las producciones:

$$n_k \mapsto n_i s_i \to q_k = F(q_i, s_i) \tag{1.28}$$

El funcionamiento de un autómata tal imita el análisis sintáctico que se lleva a cabo con las producciones F.

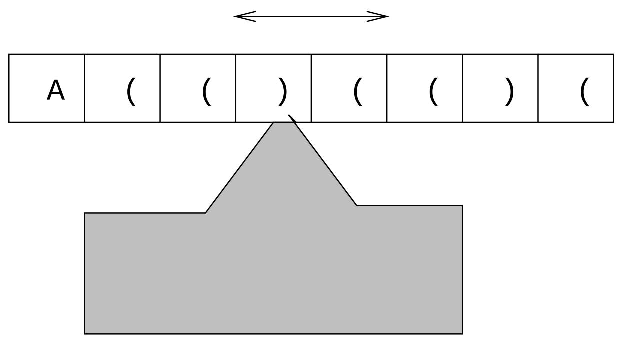


Figura 1.6: Esquema de una máquina de Turing

1.6.2 Máquinas de Turing

Un autómata de estados finitos no puede analizar una gramática de tipo menor que 3. Por ejemplo, la estructura de paréntesis (Problema 1.6) es una gramática de tipo 2 que no puede ser analizada por un autómata de estados finitos. Para comprender la dificultad, esbocemos un algoritmo muy sencillo para contar paréntesis:

1. Se inicia un contador `C` a cero.

2. Durante la lectura del texto, el contador se incrementa en uno cada vez que encuentra un paréntesis izquierdo '(' y se decrementa en uno cada vez que se encuentra un paréntesis derecho ')'.

3. La estructura es correcta si al terminar el texto el contador ha vuelto a cero.

Ahora bien, las estructuras de paréntesis pueden estar profundamente anidadas: en principio, una expresión algebraica puede contener pares de paréntsis dentro de pares de paréntesis hasta cualquier profundidad. Para poder analizar una estructura *arbitraria* es necesario un contador capaz de contar enteros arbitrariamente grandes. Eso no puede hacerse con una máquina de estados finitos que, por definición, solo puede contar enteros hasta un número prefijado (aunque muy grande, en principio).

Un autómata que, en principio, puede analizar un lenguaje de gramática arbitrariamente compleja es una *máquina de Turing*. Ésta es un autómata formado por dos partes: una máquina de estados finitos y una cinta de longitud infinita, que sirve a la vez de entrada y salida. La cinta está dividida en casilleros, en cada uno de los cuales puede escribirse un símbolo del alfabeto S. El alfabeto de salida de la máquina de Turing es, pues, el mismo que el de entrada. Por otra parte, para su funcionamiento es necesario especificar, además de las funciones F y G, otra función más $D : S \times Q \to \{\mathbb{I}, \mathbb{D}\}$, que define las direcciones de movimiento de la cinta (izquierda o derecha), dependiendo del símbolo leído y del estado interno.

La máquina funciona de la siguiente manera:

1. La máquina se coloca en el estado inicial q_0, con la cinta colocada en el símbolo inicial s_0.

2. La máquina, en el estado q_j, lee el símbolo que está delante de ella, s_i, y luego:

   (a) cambia al estado $q_{ij} = F(s_i, q_j)$;

   (b) escribe el símbolo $s_{ij} = G(s_i, q_j)$ en la cinta;

   (c) se mueve en la dirección $d_{ij} = D(s_i, q_j)$. (En realidad, mueve la cinta en la dirección contraria).

q_j	s_i	q_{ij}	s_{ij}	d_{ij}
0	)	1	X	$\mathbb{I}$
0	(	0	(	$\mathbb{D}$
0	*	2	*	$\mathbb{I}$
0	X	0	X	$\mathbb{D}$
1	)	1	)	$\mathbb{I}$
1	(	0	X	$\mathbb{D}$
1	*	H	0	—
1	X	1	X	$\mathbb{I}$
2	)	—	—	—
2	(	H	0	—
2	*	H	1	—
2	X	2	X	$\mathbb{I}$

Tabla 1.2: Ejemplo de una máquina de Turing

3. La operación 2 se repite hasta terminar.

Ejercicio 1.8.
Dar una descripción formal de la máquina de Turing.

El funcionamiento de una máquina de Turing puede describirse dando las funciones F, G, D; esto puede hacerse como un conjunto de quintupletas

$$Q_{ij} = \langle s_i, q_j, s_{ij}, q_{ij}, d_{ij} \rangle \tag{1.29}$$

que las describen simultáneamente. La tabla 1.2 muestra una descripción en quintupletas de una máquina de Turing que analiza una estructura de paréntesis y escribe un `1` si la estructura está bien formada y `0` en caso contrario [95].

El funcionamiento de esta máquina particular es el siguiente. La estructura de paréntesis, de longitud arbitraria, está escrita sobre la cinta, limitada por los caracteres '`*`'. La máquina empieza a trabajar en el primer paréntesis, en el estado 'q_0'. En este estado se mueve hacia la derecha hasta que encuentra un paréntesis derecho '`)`'. Aquí lo tacha, (con una '`X`') cambia al estado q_1 y empieza a moverse hacia la izquierda hasta encontrar un paréntesis izquierdo '`(`'. Si lo encuentra, lo tacha y pasa al estado q_0. Estos viajes de ida y vuelta continúan hasta que la máquina encuentra un delimitador '`*`'. Si en el estado q_1 no encuentra un '`(`', sobra un '`)`' y la máquina imprime un '`0`'. Por otra parte, si en el estado q_0 la máquina no encuentra un paréntesis derecho, pasa al estado q_2 para verificar que no sobre ningún paréntesis izquierdo. Si esto ocurre, imprime un '`1`' y se detiene.

Una máquina de Turing puede generar (o analizar) un lenguaje generado por una gramática de tipo 0. Este importante resultado se obtiene asignando estados internos convenientes a cada símbolo del alfabeto auxiliar y construyendo funciones F, G, D apropiadas. Los detalles pueden verse en la bibliografía.

Capítulo 2

Conceptos

La ciencia trabaja con *constructos*: entidades abstractas que representan *conceptos*, es decir, procesos cerebrales generados al examinar un problema científico. El lenguaje que utilizaremos para la ciencia debe ser un *lenguaje conceptual*, capaz de analizar conceptos en la forma de constructos. los lenguajes conceptuales se desarrollan a través de un núcleo común: la *lógica simbólica*. En este capítulo introduciremos algunos elementos semánticos que subyacen a la lógica simbólica y examinaremos la sintaxis de la misma.

2.1 Conceptos

El objeto del lenguaje en filosofía es la comunicación de *constructos*, que se originan en *ideas* o *conceptos* y éstos, a su vez, se *refieren* (o hablan de) al mundo real. Debemos imponer al lenguaje que utilizaremos la capacidad de trabajar con conceptos y ésta es una propiedad semántica del lenguaje.

2.1.1 Fisiología y concepto

Un *proceso mental* es un proceso fisiológico en la *parte plástica* del sistema nervioso central. Estos procesos, capaces de modificar la activación e interconexión de complejos sistemas de neuronas parecen ser los responsables de la conciencia y las actividades intelectuales del cerebro [63, 78, 26].

Los procesos de aprendizaje y memoria, esenciales para la formación de conceptos, involucran grandes áreas deslocalizadas de la corteza cerebral, pues la presencia de lesiones cerebrales localizadas no perturba profundamente la evocación de memorias o la ideación. Por otra parte, la *enfermedad de Alzheimer*, que involucra la destrucción generalizada de la corteza cerebral, origina *amnesias globales*, además de otras consecuencias. En estos procesos de aprendizaje y memorización, participan como reguladores otras regiones del cerebro, tales como el *hipocampo* y la *amígdala* [78].

La formación de conceptos es un fenómeno complejo, todavía mal entendido en términos de procesos fisiológicos subyacentes. Una descripción sicológica muy simplificada es la siguiente:

Sensación: La presencia de un objeto material activa los órganos sensoriales del sujeto, dando lugar a una *sensación*. Por ejemplo, la luz reflejada por un libro activa los fotorreceptores de la retina, induciendo una compleja secuencia de impulsos nerviosos que las vías neurales conducen al cerebro.

Percepción: Los impulsos nerviosos originados en una sensación se elaboran en el cerebro, correlacionándolos entre sí y con otros impulsos nerviosos. Esta compleja actividad cerebral de elaboración es un proceso mental que llamamos *percepción.*

La sensación y la percepción no son procesos independientes: las sensaciones se modifican, bajo control cerebral, para mejorar la precepción de un objeto. Por ejemplo, el fenómeno de *inhibición lateral* en la visión, selecciona los impulsos nerviosos provenientes del objeto que está percibiéndose y elimina el "ruido de fondo" de otros objetos que lo rodean.

Conceptuación: Las distintas percepciones memorizadas se correlacionan entre sí para dar lugar a un *concepto*: una descripción del objeto almacenada en la memoria del sujeto, que puede ser evocada sea por otra percepción o por un proceso mental diferente.

Para los objetos que no pueden percibirse directamente (por ejemplo, conjuntos, electrones o normas legales) el proceso de conceptuación se produce por elaboración de otros conceptos a través de mecanismos como la *abstracción.* Por ejemplo, el concepto de número cardinal se forma (a una edad relativamente avanzada) por comparación de distintos conjuntos de objetos que pueden coordinarse entre sí.

2.1.2 Constructos

Un concepto es un proceso mental en un determinado cerebro humano. Estrictamente hablando, cada concepto es único, puesto que el proceso mental no es repetible. Sin embargo, cada vez que uno evoca el número '2', o una mesa o el lucero de la tarde, es capaz de reconocer ese proceso mental y conectarlo con otros similares. De alguna manera, estos conceptos tienen algo en común. Diremos que estos conceptos reconocibles son equivalentes, aunque la relación de equivalencia entre ellos no esté todavía aclarada por la ciencia.

La clase de equivalencia de conceptos se llama un *constructo* y su importancia fundamental es que, a diferencia de el concepto, es *comunicable.* En efecto, aunque los conceptos de número (o de libro) sean privados (procesos mentales en un único cerebro humano) pertenecen a la misma clase de equivalencia y son (de alguna manera) comparables. Utilizaremos una notación especial para designar constructos: encerraremos su nombre entre "rinconeras": Así, los constructos que representan el número 2 y el elemento hidrógeno los denotaremos $\ulcorner 2 \urcorner$ y $\ulcorner$hidrógeno$\urcorner$ respectivamente.

Existen estructuras lingüísticas especializadas para comunicar constructos. Examinemos brevemente las principales entre ellas:

Términos: La forma más sencilla de constructo se designa con un *término*: un objeto lingüístico que generaliza la noción de sustantivo. Los términos denotan objetos individuales o conjuntos más o menos heterogéneos de objetos.

Predicados: Un constructo más complejo que un término es un *predicado.* Un predicado describe una propiedad de un objeto indeterminado. Por ejemplo, el predicado: $\ulcorner x$ es presidente$\urcorner$ describe cierta propiedad (temporal) de un ser humano indeterminado x, mientras que $\ulcorner x$ está casado con $y \urcorner$ describe una propiedad de un par ordenado de humanos (x, y). Se designan con oraciones que contienen signos ligüísticos indeterminados, llamados variables.

Proposiciones: Una *proposición* es un conjunto de oraciones *aseverativas* sinónimas. Se construyen combinando proposiciones simples (generalmente predicados) con las leyes de la lógica. En los capítulos siguientes veremos que estas leyes pueden formularse sobre la base de un lenguaje formal.

Teorías: Los constructos más complejos que estudiaremos son las *teorías*: conjuntos de proposiciones ligadas entre sí por relaciones lógicas, en particular la relación de implicación.

Intentaremos ahora generalizar la noción de nombre introduciendo la de *símbolo*: una secuencia de signos lingüísticos que denota un conjunto de objetos materiales o conceptuales.

Definición 2.1 (Lenguaje simbólico).
Un lenguaje formal $\mathcal{L}$ (Sec. 1.5), generado por la gramática $G = (V_T, V_N, X_0, F)$, se llama *lenguaje simbólico* si existen dos conjuntos, tales que:

Ω: es un conjunto de objetos (reales, ficticios, conceptuales, ...), que llamaremos el *universo de discurso* del lenguaje.

Δ: es una función que asigna a cada oración bien formada del lenguaje $\mathcal{L}$ un subconjunto de Ω. Esta *función codificadora* es el *mapa de interpretación* de $\mathcal{L}$:

$$\Delta : \mathcal{L} \to \mathcal{P}(\Omega) \tag{2.1}$$

Esta función hace el papel de diccionario: en primera aproximación asigna un significado a cada oración bien formada de $\mathcal{L}$.

Las oraciones bien formadas de $\mathcal{L}$ se llaman *símbolos*, que designan (o denotan o representan) los elementos del universo de discurso Ω.

2.2 Nociones semánticas

Comenzaremos con algunas consideraciones intuitivas acerca de la semántica de una teoría científica, tema que estuidaremos con más detallen en capítulos venideros. Es conveniente comenzar el análisis de las proposiciones elementales. Las más sencillas son los predicados (Sec. 2.1), que describen (o representan) propiedades de un conjunto de objetos Ω: el *Universo de discurso*.

2.2.1 Objetos, predicados y relaciones

Sea entonces Ω nuestro universo de discurso. Los objetos que lo componen $a \in \Omega$ tienen *propiedades*: por ejemplo, los objetos pueden ser *materiales*, como un ratón o un campo electromagnético, o *ideales*, como un triángulo geométrico o una proposición. Además, cada objeto puede tener otras propiedades características del mismo. Por ejemplo, un electrón puede tener su spin apuntando en la dirección del movimiento o en la opuesta (la *helicidad* del electrón) y un triángulo puede ser equilátero.

El universo de discurso tiene, pues, una estructura muy compleja: está formado por varias partes $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$, algunas de las cuales pueden superponerse parcialmente. Hay una división sin embargo, que es fundamental (la que hemos mencionado arriba) entre objetos ideales (los constructos) y objetos materiales. Sea C el conjunto de todos los constructos:

$$C = \{x | x \text{ es un constructo}\} \tag{2.2}$$

Los objetos que no son constructos se llaman objetos *factuales*:

$$F = \Omega - C \tag{2.3}$$

Todos los objetos de Ω tienen *propiedades formales*. Por ejemplo, los objetos de Ω pueden clasificarse de distintas maneras. La pertenencia o no a una de esas clases es una propiedad formal. Los objetos factuales u objetos materiales tienen, además, *propiedades sustanciales*. Por ejemplo, el hierro tiene la propiedad conceptual (o formal) de pertenecer al grupo VIII de la tabla periódica y la propiedad sustancial de tener una densidad $\rho(\mathrm{Fe}) \simeq 7.8\ \mathrm{g/cm^3}$. La propiedad formal, por otra parte, es consecuencia de varias propiedades sustanciales (fundamentalmente la valencia) comunes a los elementos de la grupo VIII [22].

En el lenguaje objeto, los individuos concretos pueden designarse con símbolos especiales. Por ejemplo, usamos el nombre "$\triangle ABC$" para un triángulo dado y "Fe" para el hierro. La atribución de propiedades a individuos concretos se hace a través de *proposiciones singulares*, que se refieren al mismo. Por ejemplo:

$$\ulcorner \text{El triangulo } \triangle ABC \text{ es obtuso} \urcorner \tag{2.4}$$

$$\ulcorner \rho(\mathrm{Fe}) \simeq 7.8\ \mathrm{g/cm^3} \urcorner \tag{2.5}$$

son proposiciones singulares.

Esto es suficiente para Funes el memorioso, pero la ciencia se interesa en propiedades comunes a muchos objetos pues son estas propiedades comunes las que permiten generalizar. Un constructo que atribuye una propiedad a un objeto indeterminado se llama un *predicado* [116]. De esta manera, los constructos:

$$\ulcorner x \text{ es un triángulo} \urcorner \tag{2.6}$$

$$\ulcorner x \text{ tiene helicidad positiva} \urcorner \tag{2.7}$$

son predicados donde el objeto indeterminado se ha denotado con la *variable* 'x'. Una variable, pues, designa un objeto indeterminado y juega un papel análogo al de los nombres comunes en el lenguaje natural.

Designaremos a los predicados con la *notación funcional*: un símbolo (que puede ser un nombre) seguido del argumento entre paréntesis. Sin embargo, cuando no se preste a confusión, usaremos la notación polaca directa: el símbolo seguido del argumento. Por ejemplo, los predicados (2.6) y (2.7) pueden representarse en la forma:

$$\triangle x \stackrel{\text{def}}{=} \triangle(x) \tag{2.8}$$

$$\mathrm{Hel}^{(+)}\, x \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hel}^{(+)}(x) \tag{2.9}$$

Advirtamos que los predicados no son proposiciones pues su valor de verdad (que examinaremos en la Sec. 2.3) está indeterminado: hasta que no se especifique el objeto x es imposible asignarles un valor de verdad. En cambio, un predicado es una *función proposicional*. En realidad, convendrá distinguir dos funciones distintas que están definidas por un predicado. En primer lugar, tenemos una función proposicional *intensional*:[1] a cada objeto x de Ω le asigna una proposición $P(x)$. Por otra parte, la función proposicional *extensional* le asigna a cada objeto x el *valor de verdad* $\hat{P}(x)$ (Cf. 2.3.1).

Con más precisión, si $\mathcal{P}$ es el conjunto de las proposiciones, un predicado P define dos funciones:

$$P : \Omega \to \mathcal{P} \tag{2.10}$$

$$\hat{P} : \Omega \to \mathcal{V} \tag{2.11}$$

Desde ahora en adelante, sin embargo, designaremos a las dos funciones P y $\hat{P}$ *usando el mismo signo*, el de la función intensional P.

[1] Parece un herror de hortografía, pero no lo es

Con más generalidad, una *relación n-aria* $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función proposicional de dos o más variables:

$$R : \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n \to \mathcal{P} \tag{2.12}$$

$$\hat{R} : \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n \to \mathcal{V} \tag{2.13}$$

y nuevamente, usaremos la notación intensional para designar ambas funciones.

Las relaciones n-arias establecen *propiedades relacionales* entre dos o más objetos que pueden ser de distinta clase.

Por lo general, usaremos para las relaciones la notación funcional. Muchas veces, para aligerar la exposición, usaremos un *abuso de lenguaje*: en lugar de usar un símbolo del lenguaje objeto para designar un predicado, usaremos una oración del metalenguaje encerrada entre cantoneras que, cuando no haya riesgo de confusión, omitiremos. En el caso de las relaciones binarias, que son muy comunes en matemáticas y frecuentes en el resto de la ciencia, usaremos una notación especial.

Los siguientes son ejemplos de *relaciones binarias*:

$$\ulcorner\text{Las rectas } r \text{ y } r' \text{ son paralelas}\urcorner \tag{2.14}$$

$$\ulcorner\text{La recta } r \text{ corta el triángulo } T\urcorner \tag{2.15}$$

$$\ulcorner\text{Los campos } \mathbf{E} \text{ y } \mathbf{H} \text{ son ortogonales}\urcorner \tag{2.16}$$

$$\ulcorner\text{El electrón } a \text{ choca contra el átomo } Z\urcorner \tag{2.17}$$

$$\ulcorner\text{El organismo } a \text{ muta al organismo } b\urcorner \tag{2.18}$$

Para éstas relaciones tan comunes se suele usar la *notación de infijo*, análoga a la notación para los signos lógicos o algebraicos: el símbolo que designa la relación se coloca *entre* los *relatos*. Por ejemplo, para las relaciones binarias anteriores:

$$r \parallel r' \tag{2.19}$$

$$r \text{ corta } T \tag{2.20}$$

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \tag{2.21}$$

$$a \text{ choca } Z \tag{2.22}$$

$$a \text{ muta a } b \tag{2.23}$$

respectivamente.

Por lo general, en las ciencias naturales las relaciones son muy complejas e involucran muchos argumentos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}&\ulcorner\text{La partícula } a \text{ en el instante } t \text{ está en el punto } x\\ &\quad\text{moviéndose con velocidad } v \text{ respecto del sistema de referencia } K\urcorner\end{aligned} \tag{2.24}$$

y un predicado experimental es todavía más complicado.

Vamos a utilizar, en lo que sigue, una notación especial para describir proposiciones y predicados de una forma dada. Letras negritas como '$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$' representan *proposiciones arbitrarias*. De la misma manera, representaremos un predicado arbitrario de una variable en la forma $\boldsymbol{P(x)}$. Cualquier fórmula del lenguaje expresada con estas letras representa, en realidad, un conjunto infinito de proposiciones de la misma forma. Llamaremos a estas letras (a falta de un nombre mejor) *variables sintácticas* y a una oración construida con variables sintácticas (que representa, por lo tanto, un conjunto infinito de oraciones de una forma dada) lo llamaremos *esquema de oración*.

2.2.2 Términos

Pasemos a describir con más cuidado la forma de denotar los objetos de Ω. En una teoría científica $\mathcal{T}$ un objeto distinguido recibe un *nombre propio* que es una *constante* de $\mathcal{T}$. La elección de estos nombres es arbitraria y, además, no es unívoca: un mismo objeto puede tener varios nombres:

$$\begin{aligned}&\text{“Venus”}\\&\text{“El lucero de la tarde”}\\&\text{“El lucero del alba”}\end{aligned}\tag{2.25}$$

son tres nombres que denotan el mismo objeto [116].

La distinción entre constantes y variables se manifiesta en que la teoría se refiere a un objeto especial, único, representado por la constante, y a otros objetos genéricos representados por las variables. Por ejemplo, se pueden generalizar los resultados obtenidos para un objeto representado por una variable, pero es imposible (dentro de la teoría) generalizar los resultados obtenidos para un objeto representado por una constante.

Ya hemos visto que una variable x cumple, en la teoría, el papel de un nombre común: denota un objeto indeterminado y reemplaza al uso de sustantivos como ‘perro’, ‘elemento’, ‘campo’. El significado de algunos de estos sustantivos está conectado con sus propiedades, por ejemplo, sus relaciones con otros sustantivos que denotan objetos. Es, pues conveniente utilizar un constructo que muestre en forma explícita estas relaciones. Tales constructos se llaman las *descripciones indefinidas.*

Introduzcamos el *símbolo de Hilbert*: τ, que cumple el papel del artículo indefinido ‘un’ en castellano [73, 14]. El símbolo de Hilbert se usa de la siguiente manera: Si $\boldsymbol{P(x)}$ es un predicado donde aparece la variable x, obtenemos la expresión “un objeto con la propiedad $\boldsymbol{P}$”

1. Se reemplaza la variable x por el símbolo especial $\boxed{x}$. Estos símbolos recuadrados no son variables: son marcas destinadas a indicar el tipo de objetos cuyas propiedades estamos investigando. En particular, no pueden reemplazarse por otro símbolo recuadrado.

2. La fórmula reemplazada se prefija con el símbolo $\tau\boxed{x}$

Por ejemplo, las expresiones

$$\tau\boxed{x}\,(\triangle\boxed{x})\tag{2.26}$$

$$\tau\boxed{x}\left(\mathrm{Hel}^{(+)}\,\boxed{x}\right)\tag{2.27}$$

se leen ⌜un triángulo⌝ y ⌜un electrón con helicidad positiva⌝ respectivamente.

Las variables recuadradas ($\boxed{x}$, $\boxed{y}$, etc.) son símbolos auxiliares únicos, diferentes de todas las variables y distintos entre sí. Podemos aligerar la notación reemplazando la expresión ‘$\tau\boxed{x}[\boldsymbol{P}(\boxed{x})]$’ por la más sencilla ‘$\tau x\boldsymbol{P}(x)$’, pero recordando que:

- La variable x no aparece en la expresión: ha sido reemplazada por el correspondiente símbolo $\boxed{x}$.

- La letra x que aparece detrás de τ puede reemplazarse por cualquier variable y que no aparezca en la fórmula.

Estas variables aparentes se llaman *variables ligadas*, para disitinguirlas de las variables comunes, que también se llaman *variables libres.*

Las descripciones indefinidas pueden usarse para definir objetos más complicados. Por ejemplo:

$$\ulcorner\tau r(r\parallel r')\urcorner\tag{2.28}$$

$$\ulcorner\tau a\,(a\text{ choca }Z)\urcorner\tag{2.29}$$

son funciones que representan

$$\ulcorner\text{una recta paralela a } r'\urcorner \tag{2.30}$$

$$\ulcorner\text{un electrón que choca con el átomo } Z\urcorner \tag{2.31}$$

respectivamente. Intuitivamente, las funciones (2.28) y (2.29) "eligen" una recta o un electrón entre los muchos posibles, y suelen llamarse *funciones de elección*.

Los tres tipos de objetos que hemos introducido (constantes, variables y descripciones indefinidas) se llaman *términos*. Desde ahora en adelante, representaremos un término arbitrario con una letra minúscula en negrita ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$).

2.2.3 Ejemplos

Ante todo, dada una teoría $\mathcal{T}$, debemos distinguir entre *variables* y *constantes* de la teoría. Veamos algunos ejemplos sencillos de teorías e identifiquemos sus constantes, variables y algunas propsiciones atómicas típicas.

Ejemplo 2.1 (Teoría de grupos).

Constantes: G, $\otimes$

Variables: $a, b, \ldots$

Proposiciones atómicas:

$$\ulcorner\otimes\text{ es asociativa}\urcorner \tag{2.32}$$

$$\ulcorner a\text{ pertenece al grupo}\urcorner \tag{2.33}$$

Ejemplo 2.2 (Caída de los cuerpos).

Constantes: g

Variables: $z, t, c, m(c)$

Proposiciones atómicas:

$$\ulcorner g\text{ es la aceleración de la gravedad}\urcorner \tag{2.34}$$

$$\ulcorner\text{En el instante } t \text{ el cuerpo } c \text{ tiene la posición } z\urcorner \tag{2.35}$$

En estos ejemplos, las oraciones (2.32) y (2.34) son (o representan) proposiciones que pueden ser verdaderas o falsas. En cambio (2.33) y (2.35) son oraciones cuyo valor de verdad no está definido: depende del objeto examinado y de sus propiedades. Se trata pues de *funciones proposicionales*: funciones que a cada objeto le asignan una proposición.

Ejercicio 2.1.
Examinar las siguientes teorías e identificar sus constantes, algunas variables y proposiciones atómicas.

1. Péndulo simple.
2. Circuito oscilante RLC
3. Átomo de Bohr

2.3 Los operadores lógicos

Las proposiciones primitivas (o las funciones proposicionales atómicas) pueden combinarse entre sí para formar *proposiciones moleculares* con los *operadores lógicos*. Si bien estos operadores deben definirse de una manera puramente sintáctica, es posible dar una caracterización intuitiva de los mismos usando una noción intuitiva de verdad.

2.3.1 Falsedad y verdad

Diremos que una proposición atómica $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$ es verdadera si el término $\boldsymbol{t}$ posee la propiedad representada por $\boldsymbol{P}$ y falsa en caso contrario. Trataremos de extender la noción de verdad a las proposiciones.

Sea entonces un conjunto de dos elementos: $\mathcal{V} = \{\mathtt{V}, \mathtt{F}\}$. Una *valoración* de la teoría es una función:

$$V : W(\mathcal{L}) \to \mathcal{V} \tag{2.36}$$

que a cada proposición del lenguaje lógico $\mathcal{L}$ le asigna un único valor de verdad. Designaremos con $\mathtt{V}(\boldsymbol{P})$ el valor de verdad de la proposición $\boldsymbol{P}$.

2.3.2 Las funciones veritativas

Introduzcamos dos operaciones lógicas: el condicional (que representaremos por el símbolo '$\Rightarrow$') y la negación ('$\neg$').

Intuitivamente, el condicional introduce la noción de oración condicional: "Si $\boldsymbol{A}$ entonces $\boldsymbol{B}$" se representa en la forma "$\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$". Una proposición condicional es falsa sólo si el *antecedente* $\boldsymbol{A}$ es falso y el *consecuente* $\boldsymbol{B}$ es verdadero. En particular, un antecedente falso hace automáticamente verdadera la oración condicional.

La negación de una proposición $\boldsymbol{P}$ invierte su valor de verdad: $\neg\boldsymbol{P}$ es falso si $\boldsymbol{P}$ es verdadero y viceversa.

Otros operadores lógicos de gran importancia son:

disyunción '$\vee$' : $\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$ es verdadera si cualquiera de las dos proposiciones lo es.

conjunción '$\wedge$' : $\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}$ es verdadera si ambas proposiciones lo son.

equivalencia '$\Leftrightarrow$' : $\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}$ es verdadera si ambas proposiciones son verdaderas o ambas son falsas.

A cada operador del lenguaje le asignaremos, en el metalenguaje, una función sobre los valores de verdad; es decir, una *función veritativa*. En particular, a los operadores fundamentales '$\neg$' y '$\Rightarrow$' del lenguaje objeto, les corresponden las funciones 'no' y 'cond' en el metalenguaje:

$$\mathrm{no} : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \tag{2.37}$$

$$\mathrm{cond} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} \tag{2.38}$$

Desde ahora en adelante, designaremos a las funciones 'no' y 'cond' *con los mismos signos que los operadores lógicos correspondientes*. Estas funciones están definidas por las *tablas de verdad* mostradas en la tabla 2.1. De la misma manera definiremos funciones veritativas para los demás operadores lógicos.

Vemos de esta tabla que el condicional $\Rightarrow$ es F sólo si el antecedente es V y el consecuente F. En particular, un condicional con antecedente V necesita un consecuente V para ser V.

Los operadores lógicos que hemos introducido no son independientes: por ejemplo, los operadores '$\wedge$', '$\vee$' y '$\Leftrightarrow$' pueden expresarse en función de '$\Rightarrow$' y '$\neg$':

P	Q	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	F	V

Tabla 2.1: Tablas de verdad

Disyunción: (u *"o" inclusivo*)

$$(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \stackrel{\text{def}}{=} \neg \boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q} \tag{2.39}$$

Conjunción: (o *"y" lógico*)

$$(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\neg \boldsymbol{P} \vee \neg \boldsymbol{Q}) \tag{2.40}$$

Equivalencia:

$$(\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}) \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{P}) \tag{2.41}$$

La exactitud de estas fórmulas puede comprobarse usando las tablas de verdad 2.1.

En realidad, todos los operadores lógicos pueden expresarse utilizando sólo uno de ellos: la *incompatibilidad*, que se representa con el *trazo de Schaeffer* '|' y que es equivalente a la conjunción negada:

$$\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \neg(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \tag{2.42}$$

Los operadores básicos (negación y condicional) se expresan usando la incompatibilidad en la forma:

Negación:

$$\neg \boldsymbol{P} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} \tag{2.43}$$

Condicional:

$$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{P} \mid (\boldsymbol{Q} \mid \boldsymbol{Q}) \tag{2.44}$$

Ejercicio 2.2.
Mostrar que todos los operadores lógicos pueden expresarse también usando la *disyunción negada*.

2.3.3 La noción de cuantificación

Sea $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ un predicado que contiene la variable $\boldsymbol{x}$. El término $\tau \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ denota un objeto que posee la propiedad $\boldsymbol{P}$. Sin embargo, tal objeto puede no existir. Por ejemplo:

$$\ulcorner \tau x(x \text{ es un cuadrado redondo})\urcorner$$

denota un objeto imposible. Por otra parte, una propiedad puede ser satisfecha sin que haya objetos que la satisfagan:

$$\ulcorner \tau x(x \text{ es un asteroide de chocolate})\urcorner$$

es un objeto posible, aunque sumamante inverosímil.

Diremos que "hay un objeto con la propiedad $\boldsymbol{P}$" si el objeto $\tau\boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ tiene efectivamente la propiedad:

$$\exists\boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{P}\left[\tau\boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\right] \tag{2.45}$$

expresión que se lee "Hay (o existe) un $\boldsymbol{x}$ que tiene la propiedad $\boldsymbol{P}$" o, con más brevedad: "Hay (o existe) un $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{P}$".

El símbolo $\exists$ se conoce como el *cuantificador existencial.* Dado un predicado $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$, el cuantificador existencial construye la `FBF` $\exists\boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ que designa una proposición porque no contiene la variable $\boldsymbol{x}$. Su definición (2.45) solo afirma que el objeto denotado por la descripción indefinida satisface el predicado $\boldsymbol{P}$. Puede probarse fácilmente que para un conjunto *finito* de n objetos x_i:

$$\exists x P(x) \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} P(x_i) \tag{2.46}$$

Para un conjunto de infinitos elementos, sin embargo, esta ecuación no puede probarse y el cuantificador extiende la noción de disyunción a los conjuntos infinitos. De esta manera el cuantificador existencial se transforma en un poderoso instrumento para trabajar con conjuntos infinitos. Pese a la lectura tradicional, no afirma su existencia fáctica, es decir, como un hecho. Una lectura clásica (que data de los tiempos de Aristóteles) que puede ser más intuitiva es: "Algún $\boldsymbol{x}$ es $\boldsymbol{P}$". Esta lectura no tiene las connotaciones castellanas de los verbos 'haber' o 'existir'.

Diremos que todos los objetos del universo de discurso tienen la propiedad $\boldsymbol{P}$ si no hay excepciones; es decir si no hay ningún objeto que no sea $\boldsymbol{P}$:

$$\forall\boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \neg\exists\boldsymbol{x}\left[\neg\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\right] \tag{2.47}$$

que se lee "Todos los $\boldsymbol{x}$ son $\boldsymbol{P}$" o "Para todo $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{P}$". El símbolo $\forall$, llamado el *cuantificador universal* también produce una `FBF` que representa una proposición a partir de una función proposicional $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$. La definición (2.47) es equivalente a:

$$\forall\boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}\left\{\tau\boldsymbol{x}\left[\neg\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\right]\right\} \tag{2.48}$$

La interpretación del cuantificador universal es complementaria de la del cuantificador existencial. En particular, para un conjunto finito:

$$\forall x P(x) \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} P(x_i) \tag{2.49}$$

que no puede probarse en el caso de un conjunto infinito y generaliza la noción de conjunción a esos conjuntos.

2.3.4 Cuantificadores típicos

Es muy común en matemáticas que una variable no se refiera a todo el universo de discurso Ω sino sólo a una parte $D \subset \Omega$ del mismo. Es común además, que esta parte de Ω esté caracterizada porque sus miembros tienen una propiedad común $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$. Es conveniente introducir una notación abreviada para indicar que se cuantifica (es decir, se examinan todos los elementos) de la parte D.

Definición 2.2 (Cuantificador existencial típico).

$$(\exists\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})) \stackrel{\text{def}}{=} \exists x(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))$$

Definición 2.3 (Cuantificador universal típico).

$$(\forall \boldsymbol{x})_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\exists \boldsymbol{x})_{\boldsymbol{A}}(\neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$$

La primera definición afirma que uno de los elementos con la propiedad $\boldsymbol{A}$ tiene también la propiedad $\boldsymbol{P}$, mientras que la segunda afirma que entre los elementos con la propiedad $\boldsymbol{A}$ no hay excepciones que no posean la propiedad $\boldsymbol{P}$. No es difícil demostrar el

Teorema 2.1.

$$(\forall \boldsymbol{x})_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$$

Existen muchas maneras de simplificar aún más la notación. Por ejemplo, si la propiedad $\boldsymbol{A}$ consiste en pertenecer a un determinado conjunto C: $\boldsymbol{A} \stackrel{\text{def}}{=} x \in C$ el subíndice del cuantificador típico se puede reemplazar por la letra C, en lugar de la expresión formal $\in C$. También usaremos, muchas veces la notación más compacta:

$$\exists_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{x} \stackrel{\text{def}}{=} (\exists \boldsymbol{x})_{\boldsymbol{A}} \tag{2.50}$$

cuando no se preste a confusión.

2.4 Estructura formal

Comenzaremos nuestro estudio de la *lógica simbólica clásica* (para distinguirla de otras formas de la lógica) examinado la estructura del lenguaje que utilizaremos. Por otra parte, nuestro metalenguaje será el castellano, provisto de los símbolos lógicos y matemáticos necesarios para comentar el texto del lenguaje objeto.

Llamaremos una *teoría* $\mathcal{T}$ a un conjunto de proposiciones ligadas entre sí por la relación de deducción (que definiremos rigurosamente en la Sec. 2.5). Cualquier proposición de $\mathcal{T}$ puede formarse combinando proposiciones simples entre sí con operadores lógicos. Las proposiciones elementales, que no pueden descomponerse en otras más simples, se llaman *proposiciones atómicas* o *predicados primitivos*. Intuitivamente, estas proposiciones afirman (o niegan) propiedades de los objetos que estudia la teoría.

2.4.1 Términos y fórmulas

Pasemos ahora a definir la noción de *fórmula* u oración *bien formada* (`FBF`) en nuestro lenguaje. Estas oraciones se forman combinado las proposiciones atómicas con los operadores lógicos. Por otra parte, estas últimas se construyen sustituyendo términos en predicados. Examinemos en detalle.

Ante todo, introduciremos los alfabetos. Usaremos un rico alfabeto terminal V_T, que incluye letras de distinta tipografía y símbolos adecuados para expresar conceptos en ciencias naturales. El alfabeto auxiliar V_N, en cambio, es sumamente sencillo:

$$\begin{aligned} V_N = \{&\texttt{constante}, \texttt{variable}, \texttt{símbolo}, \texttt{término}, \\ &\texttt{primitiva}, \texttt{FBF}\} \end{aligned} \tag{2.51}$$

La noción de término puede definirse sintácticamente como:

$$\texttt{término} \mapsto \texttt{constante} \tag{2.52}$$

$$\mapsto \texttt{variable} \tag{2.53}$$

$$\mapsto \tau \boxed{x} \texttt{FBF}(\boxed{x}) \tag{2.54}$$

Estas reglas gramaticales formalizan la noción intuitiva de término introducida en la sección 2.2.

Las proposiciones primitivas se construyen a partir de los predicados primitivos aplicándolos a términos:

$$\texttt{primitiva} \mapsto \texttt{símbolo}\{\texttt{término}\} \tag{2.55}$$

en donde las llaves indican una lista de cero o más términos.

Una FBF se define a través de reglas gramaticales recursivas (sección 1.5):

$$\begin{aligned} \texttt{FBF} &\mapsto \texttt{primitiva} \\ &\mapsto \Rightarrow \texttt{FBF FBF} \\ &\mapsto \neg\texttt{FBF} \end{aligned} \tag{2.56}$$

Siendo puramente sintácticas, estas reglas gramaticales no dependen del significado de los símbolos sino sólo de su estructura formal.

Esta gramática tiene una interpretación intuitiva sencilla:

1. Cualquier proposición atómica $\boldsymbol{A}$ es una FBF.
2. Si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ son FBFs, entonces también la nueva expresión $\Rightarrow \boldsymbol{AB}$ es una FBF.
3. Si $\boldsymbol{A}$ es una FBF, se puede formar una nueva FBF como $\neg\boldsymbol{A}$.

Ejercicio 2.3.
Enunciar reglas de formación para FBFs utilizando el operador '|' (incompatibilidad) como primitivo.

2.4.2 Abreviaturas y sustitución

Ante todo, nos sacaremos de encima las molestas letras recuadradas usando las convenciones de la sección 2.2:

$$\tau x \boldsymbol{P}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \tau \boxed{x} \boldsymbol{P}(\boxed{x}) \tag{2.57}$$

Con estas convenciones previas podemos demostrar el importante

Teorema 2.2 ((Meta)Teorema de la sustitución de términos).
Si $\vdash \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{t}$ *es un término y* $\boldsymbol{x}$ *una variable,* $\vdash \boldsymbol{T}(\boldsymbol{t})$.

Demostración. Consiste en construir una demostración de $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{t})$, mostrando que en cada paso puede sustituirse $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{t}$. □

De la misma manera, es posible "sustituir" una FBF $\boldsymbol{P}$ por otra FBF $\boldsymbol{Q}$ que estén embebidos en otra FBF más compleja $\boldsymbol{R}$:

Teorema 2.3 ((Meta)Teorema de la sustitución de fórmulas).
Si $\boldsymbol{R}$ *es una FBF que contiene una subFBF* $\boldsymbol{P}$*, entonces* $\boldsymbol{R}'$*, obtenida reemplazando* $\boldsymbol{P}$ *por* $\boldsymbol{Q}$ *en todas partes es también una FBF.*

Podemos ahora introducir la noción de *definición* en nuestro lenguaje.

Definición 2.4.
Una definición

$$\boldsymbol{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{P}$$

es una relación entre dos FBFs: el *definiendo* $\boldsymbol{Q}$, y el *definiente* $\boldsymbol{P}$, tales que

$$\boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \boldsymbol{P}$$

Prioridad	Nombre	Símbolo
1	Símbolos	`S`
2	Igualdad	$=$
3	Negación	$\neg$
4	Selección	τ
5	Generalidad	$\forall$
6	Existencia	$\exists$
7	Conjunción	$\wedge$
8	Disyunción	$\vee$
9	Condicional	$\Rightarrow$
10	Equivalencia	$\Leftrightarrow$
11	Consecuencia	$\vdash$

Tabla 2.2: Esquema de precedencia para los operadores lógicos

Esta definición de 'definición', que está en el metalenguaje, describe una propiedad de símbolos del lenguaje. Aquí no hay, por supuesto, circularidad.

En esta descripción sintáctica hemos utilizado la *notación polaca directa*. Esta notación evita el uso de paréntesis (que suelen llenar los tratados de lógica) y tiene un gran interés teórico y práctico[2]. La notación polaca tiene inconvenientes para su lectura por los humanos, que encontramos cómoda la notación matemática común, en la que el operador se escribe entre ambos operandos y se introducen paréntesis en forma apropiada para indicar el agrupamiento. Para volver a la notación usual introducimos:

$$(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \tag{2.58}$$

Además, eliminaremos el exceso de paréntesis introduciendo un esquema de *precedencia*, similar al que se utiliza en el álgebra o en los lenguajes de programación. La tabla 2.2 muestra el esquema de precedencia que utilizaremos (similar al del lenguaje `ALGOL`).

La segunda forma de simplificar la lógica es introducir nuevos *operadores lógicos*. En particular, los operadores 'y', 'o' y 'equivalencia', intoducidos en la sección 2.3 son especialmente útiles y abrevian notablemente gran parte de las oraciones lógicas.

2.5 Teoremas

El objetivo de la lógica es demostrar nuevas fórmulas a partir de otras conocidas o postuladas. Podemos caracterizar este concepto en nuestro lenguaje en una forma sumamente económica introduciendo la noción de *consecuencia* de un conjunto de `FBF`s.

2.5.1 Hipótesis, axiomas y esquemas

Toda teoría matemática parte de un conjunto de oraciones $\mathcal{H}$ que se llaman las *hipótesis* de la teoría. Todas las demás `FBF`s deben obtenerse a partir de las hipótesis usando una o más veces las reglas de demostración.

Conviene separar el conjunto $\mathcal{H}$ en tres subconjuntos separados: los *esquemas de axioma* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, los *axiomas* $\mathcal{A}$ y las hipótesis auxiliares. Los dos primeros son esenciales,

[2] El lenguaje de programación `LISP` se expresa en una variante (llena de paréntesis) de esta notación. Por otra parte, las calculadoras `RPN` usan la *notación polaca inversa* que es, esencialmente, la reflexión especular de la notación polaca directa.

porque definen la teoría. Las `FBFs` de este subconjunto de hipótesis se llaman, genéricamente, los *postulados* de la teoría. Por ejemplo, las leyes de Newton forman parte de los (esquemas de) axiomas de la mecánica clásica. Las hipótesis auxiliares, por otra parte, especifican problemas o situaciones particulares. Por ejemplo, en mecánica clásica, son hipótesis auxiliares las que definen el oscilador armónico o el problema de Képler. Introduciremos la convención de que los axiomas y esquemas de axioma se sobreenntienden y no se incluyen explícitamente en el conjunto $\mathcal{H}$.

Un esquema de axioma es un conjunto de proposiciones $\mathcal{P}$ que tienen una forma común. Por ejemplo, la segunda ley de Newton, escrita en la forma:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F} \tag{2.59}$$

es un esquema de axioma pues es válido para cualquier fuerza $\mathbf{F}$. La ecuación (2.59) representa, pues, infinitos axiomas, uno para cada función vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$.

La separación de los axiomas de las hipótesis auxiliares permite una caracterización puramente sintáctca de las constantes de la teoría: son aquellas letras que aparecen en los axiomas.

2.5.2 Consecuencia

Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de las hipótesis. Una *demostración* de la `FBF` $\boldsymbol{P}_n$ a partir de $\mathcal{H}$ es una secuencia de `FBFs` $\boldsymbol{P}_i$, cada una de las cuales puede construirse a partir de las hipótesis o de otras `FBFs` ya demostradas utilizando una *regla de demostración.* La proposición $\boldsymbol{P}_n$ se llama un *teorema* deducido a partir de las hipótesis $\mathcal{H}$. Usaremos la notación '$\mathcal{H} \vdash \boldsymbol{A}$' para indicar que "$\boldsymbol{A}$ es un teorema con hipótesis $\mathcal{H}$" o, en forma más breve "$\boldsymbol{A}$ es consecuencia de $\mathcal{H}$". Con más precisión:

Definición 2.5 (Regla de demostración).
Sea $P = \{\boldsymbol{P}_i; i \in [1 \dots K]\}$. Una *regla de demostración* $\mathcal{R}$ es una función que asigna al conjunto P una oración resultante $\boldsymbol{Q}$:

$$\mathcal{R} : P \to \boldsymbol{Q}$$

Definición 2.6 (Consecuencia inmediata).
Una oración $\boldsymbol{Q}$ es *consecuencia inmediata* del conjunto de oraciones $P = \{\boldsymbol{P}_i \mid i \in [1 \dots K]\}$:

$$P \vdash_i \boldsymbol{Q}$$

si existe una regla de demsotración tal que

$$\boldsymbol{Q} = \mathcal{R}(\boldsymbol{P}_1, \dots, \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}})$$

Definición 2.7 (Demostración).
Una secuencia de `FBFs` $D = \{\boldsymbol{P}_i; i \in [1 \dots N]\}$ es una *demostración* de $\boldsymbol{P}_n$ si y sólo si, para cada una de las $\boldsymbol{P}_i \in D$ se cumple alguna de las condiciones siguientes:

1. es un axioma: $\boldsymbol{P}_i \in \mathcal{A}$
2. tiene la forma especificada en un esquema de axioma
3. es una hipótesis auxiliar $\boldsymbol{P}_i \in \mathcal{H}$
4. existe un conjunto de fórmulas $\mathcal{P} = \{\boldsymbol{P}_k \mid k < i\}$ ya demostradas y $\mathcal{P} \vdash \boldsymbol{P}_n$.

Esta definición es puramente sintáctica.

La relación de consecuencia $\vdash$ tiene varias propiedades sencillas e importantes:

Teorema 2.4.
La relación de consecuencia tiene las siguientes propiedades:

Símbolo	Introducción	Eliminación
Implicación	Si $(\mathcal{H}, \boldsymbol{P} \vdash \boldsymbol{Q})$ entonces $\mathcal{H} \vdash \boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q} \vdash \boldsymbol{Q}$
Conjunción	$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \vdash \boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q} \vdash \boldsymbol{P}$ $\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q} \vdash \boldsymbol{Q}$
Disyunción	$\boldsymbol{P} \vdash \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$ $\boldsymbol{Q} \vdash \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$	Si $(\mathcal{H}, \boldsymbol{P} \vdash \boldsymbol{R})$ y $(\mathcal{H}, \boldsymbol{Q} \vdash \boldsymbol{Q})$ entonces $\mathcal{H}, \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q} \vdash \boldsymbol{R}$
Negación	Si $\mathcal{H}, \boldsymbol{P} \vdash \boldsymbol{Q}$ y $\mathcal{H}, \boldsymbol{P} \vdash \neg \boldsymbol{Q}$ entonces $\mathcal{H} \vdash \neg \boldsymbol{P}$	$\neg\neg \boldsymbol{P} \vdash \boldsymbol{P}$
Generalidad	$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vdash \forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$	$\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vdash \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$
Existencia	$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) \vdash \exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$	Si $\mathcal{H}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vdash \boldsymbol{Q}$ entonces $\mathcal{H}, \exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vdash \boldsymbol{Q}$

Tabla 2.3: Cálculo de Deducción Natural: Reglas de demostración

1. $H \vdash H$
2. *Si* $\mathcal{H} \vdash P$; *entonces* $\{H'\} \cup \mathcal{H} \vdash P$
3. *Si* $\mathcal{H} \vdash P$ *y* $P, \mathcal{H}' \vdash Q$; *entonces* $\mathcal{H} \cup \mathcal{H}' \vdash Q$

Finalmente, podemos dar una caracterización formal de la noción de teoría: una *teoría* T es el conjunto de proposiciones consecuencia de los axiomas:

$$\mathcal{T} = \{\boldsymbol{P} | \mathcal{A} \vdash \boldsymbol{P}\} \tag{2.60}$$

Refinaremos esta definición preliminar en la sección 5.3.

2.5.3 El cálculo de deducción natural

La noción de demostración que hemos introducido requiere formular un conjunto de reglas de demostración que permitan la construcción de una `FBF` $\boldsymbol{P}_{i+1}$ a partir de las `FBFs` $\boldsymbol{P}_{k \leq i}$. Es conveniente que estas reglas se asemejen a las que se utilizan habitualmente en las ciencias, especialmente en matemáticas, donde los métodos de demostración cotidianos son informales aunque rigurosos. La informalidad permite que se deslicen errores con mucha facilidad pero simplifica enormemente el tratamiento de las ciencias naturales. Es posible reformular toda la lógica de manera tal que se asemeja al razonamiento informal. Esta reformulación se conoce como el *Método de Deducción Natural* [84, 86, 54, 44].

En esta formulación, la lógica se interpreta como un proceso de introducir y eliminar signos lógicos a partir de las hipótesis $\mathcal{H}$. La tabla 2.3 da un conjunto de reglas de demostración para la lógica. Para cada uno de los símbolos se introducen dos reglas: una que *introduce* el símbolo y la otra que lo *elimina*. Al mismo tiempo, se introducen reglas que permiten suprimir hipótesis, reemplazándolas por otros constructos.

Comentemos brevemente el origen de algunas de estas reglas. Al mismo tiempo, introduciremos otra notación para describir las reglas de demostración.

Introducción de Implicación I $\Rightarrow$: Esta regla se conoce como el *teorema de la deducción*: si a partir de una hipótesis $\boldsymbol{H}$ es posible demostrar el teorema $\boldsymbol{P}$, entonces, a partir de los axiomas (y, eventualmente, del resto de las hipótesis) es posible demostrar el teorema $\boldsymbol{H} \Rightarrow \boldsymbol{P}$.

$$\mathrm{I} \Rightarrow \frac{\substack{[\boldsymbol{P}] \\ \boldsymbol{Q}}}{\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}} \tag{2.61}$$

Esta regla legitimiza la forma usual de demostrar teoremas en ciencias: se proponen hipótesis auxiliares, que se utilizan para demostrar el teorema, y luego se eliminan mediante esta regla. La deducción $\boldsymbol{H} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{P}$ se llama una *demostración auxiliar (o subsidiaria).*

Eliminación de la implicación E $\Rightarrow$: Es análoga al *silogismo* en la forma llamada *modus ponens* en la lógica aristotélica.

$$\mathrm{E}\Rightarrow \frac{\boldsymbol{P} \quad \boldsymbol{P}\Rightarrow\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{Q}} \tag{2.62}$$

Introducción de la conjunción I$\wedge$: Expresa la propiedad fundamental de la conjunción, pero *sin usar la noción de verdad.*

$$\mathrm{I}\wedge \frac{\boldsymbol{P} \quad \boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{Q}} \tag{2.63}$$

Eliminación de la conjunción E$\wedge$: Lo mismo que I$\wedge$. Esta regla puede utilizarse para introducir una hipótesis en la demostración.

$$\mathrm{E}\wedge \frac{\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{P}} \quad \mathrm{E}\wedge \frac{\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{Q}} \tag{2.64}$$

Introducción de la disyunción I$\vee$: Esta regla se conoce como *Principio de adición.* Es una herramienta poderosa, pues permite introducir *cualquier* `FBF` en una demostración como hipótesis auxiliar. Su uso, sin embargo, es delicado y lo discutiremos más adelante.

$$\mathrm{I}\vee \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{P}\vee\boldsymbol{Q}} \quad \mathrm{I}\vee \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{P}\vee\boldsymbol{Q}} \tag{2.65}$$

Eliminación de la disyunción I$\vee$: Se trata de la *regla de demostración por casos*, muy usada en matemáticas. Si es posible demostrar el teorema $\boldsymbol{R}$ sea a partir de la hipótesis $\boldsymbol{P}$ o $\boldsymbol{Q}$, y además es posible demostrar $\boldsymbol{P}\vee\boldsymbol{Q}$, entonces vale el teorema $\boldsymbol{R}$, independientemente de cual de las hipótesis$\boldsymbol{P}$ o $\boldsymbol{Q}$ sea verdadera.

$$\mathrm{I}\vee \frac{\frac{[\boldsymbol{P}]}{\boldsymbol{R}} \quad \frac{[\boldsymbol{Q}]}{\boldsymbol{R}} \quad \boldsymbol{P}\vee\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{R}} \tag{2.66}$$

Introducción de la negación I$\neg$: Esta es la regla de *reducción al absurdo*: si de una hipótesis $\boldsymbol{P}$ es posible deducir una contradicción $\boldsymbol{Q}\wedge\neg\boldsymbol{Q}$, entonces la negación de $\boldsymbol{P}$ es un teorema.

$$\mathrm{I}\neg \frac{\frac{[\boldsymbol{P}]}{\boldsymbol{Q}\wedge\neg\boldsymbol{Q}}}{\neg\boldsymbol{P}} \tag{2.67}$$

Eliminación de la negación E$\neg$: Es la regla de doble negación.

$$\mathrm{E}\neg \frac{\neg\neg\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{P}} \tag{2.68}$$

Esta regla no es válida en la lógica intuicionista.

Introducción del generalizador I$\forall$: Es la regla de *generalización*: si la propiedad $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ la posee un objeto cualquiera, la posee todo objeto.

$$\mathrm{I}\forall \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})}{\forall\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})} \tag{2.69}$$

Obviamente, $\boldsymbol{x}$ debe ser una variable.

Eliminación del generalizador E∀: Es la regla de *ejemplificación*: si la propiedad $\boldsymbol{P(x)}$ la posee todo objeto, la posee un objeto dado.

$$\mathrm{I}\forall \frac{\forall \boldsymbol{P(x)}}{\boldsymbol{P(t)}} \tag{2.70}$$

$\boldsymbol{t}$ es un término cualquera.

Introducción del existenciador I∃: Es la regla de *existenciación*: si un objeto posee la propiedad $\boldsymbol{P}$, entonces *algún* objeto indeterminado la posee.

$$\mathrm{I}\exists \frac{\boldsymbol{P(t)}}{\exists \boldsymbol{P(x)}} \tag{2.71}$$

Si se escribe el cuantificador usando el símbolo de Hilbert, esta regla es equivalente al *esquema axiomático de Hilbert*:

$$\boldsymbol{P(a)} \Rightarrow \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{\tau x P(x)}\right) \tag{2.72}$$

Eliminación del existenciador E∃: Esta regla, (que está obviamente conectada con E∨) legitimiza el *método de la constante auxiliar* o *método de elección.* La regla afirma que si a partir de la hipótesis $\boldsymbol{P(x)}$ (que depende de un objeto cualquiera $\boldsymbol{x}$) es posible demostrar el teorema $\boldsymbol{Q}$ (que no depende de $\boldsymbol{x}$) y además algún $\boldsymbol{x}$ tiene la propiedad $\boldsymbol{P}$, entonces el teorema es válido, independientemente del objeto utilizado.

$$\mathrm{E}\exists \frac{\frac{[\boldsymbol{P(x)}]}{\boldsymbol{Q}} \quad \exists \boldsymbol{x P(x)}}{\boldsymbol{Q}} \tag{2.73}$$

2.5.4 Ejemplos de deducciones

Examinemos algunos ejemplos de deducción tomados de la lógica simbólica y clásica.

Ejemplo 2.3 (Importación).
Demos una demostración del *principio de importación.*

1	P	H_1
2	Q	H_2
3	$P, Q \vdash P$	
4	$P \vdash Q \Rightarrow P$	$\mathrm{I} \Rightarrow$
5	$\vdash P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$	$\mathrm{I} \Rightarrow$

Ejemplo 2.4 (Silogismo sencillo).
El ejemplo clásico de silogismo "Todos los hombres son mortales; Sócrates es hombre y por lo tanto, Sócrates es mortal" puede analizarse introduciendo los predicados

$$Hx \Leftrightarrow \ulcorner x \text{ es hombre}\urcorner$$

$$Mx \Leftrightarrow \ulcorner x \text{ es mortal}\urcorner$$

y la constante $\mathbf{s}$ que denota a 'Sócrates'.

1	$\forall x(Hx \Rightarrow Mx)$	H_1
2	$H\mathbf{s}$	H_2
3	$H_1, H_2 \vdash H\mathbf{s} \Rightarrow M\mathbf{s}$	E∀
4	$H_1, H_2 \vdash M\mathbf{s}$	

De la misma manera pueden analizarse otros silogismos clásicos.

Ejemplo 2.5 (Las contradicciones implican cualquier proposición).
El resultado de este ejemplo sorprendió mucho cuando se descubrió, a fines del siglo pasado.

1	$\neg P$	H_1
2	Q	H_2
3	$\neg Q$	H_3
4	$\neg P, Q, \neg Q \vdash Q \wedge \neg Q$	I$\wedge$
5	$Q, \neg Q \vdash \neg\neg P$	I$\neg$
6	$Q, \neg Q \vdash P$	E$\neg$
7	$\vdash Q \wedge \neg Q \Rightarrow P$	

Una consecuencia de este ejemplo es que en una teoría que contiene una contradicción toda proposición es un teorema. Esto hace menos que dudoso su valor para el desarrollo de una ciencia. (Cf. Ejemplo 5.10)

2.5.5 Algunos teoremas lógicos

Daremos ahora una lista de teoremas lógicos, que pueden demostrarse como los ejemplos anteriores. Todas las demostraciones se dejan como ejercicio. En primer lugar, mostremos que algunas de las leyes de la lógica tradicional surgen como teoremas de la presente teoría.

Teorema 2.5 (Principio de identidad).

$$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{P}$$

Teorema 2.6 (Conversión).

$$(\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow (\neg \boldsymbol{Q} \Rightarrow \neg \boldsymbol{P})$$

Hay, sin embargo, propiedades nuevas e interesantes, difíciles de formular con la lógica aristotélica.

Teorema 2.7 (Transitividad de la implicación).

$$(\boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{R}) \Rightarrow ((\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}) \Rightarrow (\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{R}))$$

El teorema anterior justifica una nueva regla de demostración, llamada *silogismo hipotético*:

$$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{R} \vdash \boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{R} \tag{2.74}$$

Los conectores lógicos $\vee, \wedge, \neg$ satisfacen un conjunto importante de indentidades. Veremos que ellas son consecuencia de una estructura muy general, el *álgebra de Boole*, que subyace a la lógica clásica (Cf. Sección 5.1).

Teorema 2.8 (Leyes de de Morgan).

$$\neg(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow (\neg \boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{Q})$$
$$\neg(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow (\neg \boldsymbol{P} \vee \neg \boldsymbol{Q})$$

Teorema 2.9 (Propiedad conmutativa).

$$(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{P})$$
$$(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P})$$

Teorema 2.10 (Propiedad distributiva).

$$[\boldsymbol{P} \vee (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R})] \Leftrightarrow [(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{R})]$$
$$[\boldsymbol{P} \wedge (\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R})] \Leftrightarrow [(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \vee (\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{R})]$$

Teorema 2.11 (Propiedad asociativa).

$$[\boldsymbol{P} \vee (\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R})] \Leftrightarrow [(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \vee \boldsymbol{R}]$$
$$[\boldsymbol{P} \wedge (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R})] \Leftrightarrow [(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{R}]$$

Las relaciones anteriores son válidas para proposiciones arbitrarias $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, contengan o no cuantificadores. Los teoremas siguientes explicitan algunas propiedades de los cuantificadores

Teorema 2.12 (Distributividad de los cuantificadores).

$$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})) \Leftrightarrow (\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}))$$
$$\exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})) \Leftrightarrow (\exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}))$$

Teorema 2.13 (Conmutatividad de los cuantificadores).

$$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{y} \forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$
$$\exists \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{y} \exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$
$$\exists \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \Rightarrow \forall \boldsymbol{y} \exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

La recíproca del último teorema no es siempre cierta. El consecuente de la implicación, $\forall \boldsymbol{y} \exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, afirma que para cualquier objeto $\boldsymbol{y}$ dado, existe un objeto $\boldsymbol{x}$ que tiene la relación $\boldsymbol{P}$ con $\boldsymbol{y}$. El antecedente $\exists \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, por otra parte, afirma que existe un objeto $\boldsymbol{x}$ que tiene la relación $\boldsymbol{P}$ con todos los $\boldsymbol{y}$. Esto, claramente, no es cierto: por ejemplo, si $\boldsymbol{P}$ es la relación de pareja, la primera proposición afirma que cada persona tiene (o encuentra) su pareja, mientras que la segunda afirma que hay una persona que forma pareja con todo el mundo.

2.6 Lenguaje conceptual

No todos los lenguajes simbólicos son capaces de manejar conceptos; sólo un subconjunto son *lenguajes conceptuales*. Para manejar conceptos, un lenguaje necesita símbolos especiales para designar proposiciones atómicas; otros, los *signos lógicos* para combinarlas en proposiciones moleculares y, finalmente, especializaciones de los mapas de interpretación para referir conceptos.

Definición 2.8 (Lenguaje conceptual).
Un *lenguaje conceptual* es un lenguaje simbólico $\mathcal{L}$ (Def. 2.1) en donde:

1. El alfabeto terminal V_T contiene un subconjunto con los símbolos lógicos.
2. El alfabeto terminal contiene símbolos para designar a los miembros de un conjunto de *predicados atómicos* $\mathbb{P}_0$.
3. El alfabeto no terminal V_N contiene los símbolos necesarios para el análisis lingüístico de la lógica.
4. Existe un subconjunto $\varnothing \neq C \subset \Omega$ del universo de discurso formado por constructos, que contiene, al menos, todos los que involucran $P \in \mathbb{P}_0$.
5. Existe un conjunto de *reglas de demostración* (o también, *reglas de trasformación*) que permiten construir oraciones nuevas a partir de las antiguas.

6. Existe una función, que asocia conceptos a oraciones bien formadas llamada la *función de designación* $\mathcal{D}$.

7. Si f_1, f_2 son oraciones bien formadas y $\mathcal{D}(f_1) = \mathcal{D}(f_2)$, f_1 y f_2 pueden intercambiarse en cualquier otra oración bien formada de la que sean parte.

La última condición es la de que oraciones sinónimas designen el mismo concepto. La definición 2.8 precisa las nociones intuitivas que introdujimos en la sección 2.1.

En los capítulos siguientes precisaremos las nociones de constructo y lenguaje conceptual que aquí hemos esbozado.

Capítulo 3

Clases

En el capítulo 2 hemos estudiado la sintaxis y semántica elemental de la lógica simbólica, considerándola como un lenguaje conceptual. En la definición 2.8 introdujimos la noción de *reglas de demostración*, que permiten construir oraciones nuevas del lenguaje a partir de oraciones conocidas. Este proceso de construcción se llama *demostración* y es esencial en la construcción de teorías.

3.1 La igualdad

La relación binaria más importante es, probablemente, la igualdad. Intuitivamente, decimos que dos objetos son iguales si son indistinguibles. Como distinguimos los objetos examinando sus propiedades, concluimos que dos cosas son iguales si y sólo si todas sus propiedades son las mismas (Leibnitz).

Lamentablemente, el lenguaje con que trabajamos no tiene medios para construir la proposición "todas las propiedades", pues el cuantificador '$\forall$' se aplica a términos que representan objetos y no a propiedades. En su lugar, introduciremos dos formas más débiles de la caracterización anterior.

En primer lugar, enunciaremos una forma débil del axioma de Leibnitz con el siguiente esquema de axioma:

Esquema 3.1 (Principio de Leibnitz atenuado).
Toda oración de la forma:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Rightarrow (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}))$$

es un axioma.

En esta forma atenuada el axioma puede interpretarse diciendo que dos cosas iguales tienen propiedades equivalentes.

Otra forma atenuada del principio de Leibnitz surge del siguiente esquema de axioma:

Esquema 3.2 ("Axioma τ fuerte").
Toda oración de la forma:

$$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})) \Rightarrow \tau \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \tau \boldsymbol{x} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$$

es un axioma.

Este esquema no es tan intuitivo: afirma que si dos propiedades son equivalentes para todos los objetos, los representantes de esas propiedades son iguales. Verifiquemos que de estos esquemas se deducen las propiedades de la igualdad.

Teorema 3.1 (Reflexividad).
$x = x$

Demostración. Si $\boldsymbol{P}$ es una oración arbitraria,

$$\forall x(\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{P})$$

en donde hemos empleado la regla de generalización universal I$\forall$ sobre el teorema $\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{P}$. Del esquema 3.2 deducimos:

$$\tau x\boldsymbol{P} = \tau x\boldsymbol{P}$$

El caso particular interesante de este esquema es cuando $\boldsymbol{P(x)}$ es $\neg(x = x) \Leftrightarrow x \neq x$ pues en ese caso hallamos

$$\forall x(x = x)$$

y finalmente, por especialización, se demuestra el teorema. $\square$

Las otras dos propiedades se demuestan fácilmente usando el teorema 3.1 y el teorema de la deducción I $\Rightarrow$:

Teorema 3.2 (Simetría).
$x = y \Leftrightarrow y = x$

Teorema 3.3 (Transitividad).
$x = y \wedge y = z \Leftrightarrow x = z$

Las demostraciones se dejan como ejercicio.
Un predicado se llama *unívoco* si

$$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}(\boldsymbol{P(x)} \wedge \boldsymbol{P(y)}) \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{3.1}$$

es un teorema. Indicaremos la proposición anterior con la notación:

$$\text{único } x \tag{3.2}$$

En ese caso, obviamente:

$$\boldsymbol{P(x)} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \tau \boldsymbol{x}\boldsymbol{P(x)} \tag{3.3}$$

En el caso de una relación unívoca $\boldsymbol{P}$, el objeto particular $\tau \boldsymbol{x}\boldsymbol{P(x)}$ se llama una *descripción definida* y el símbolo de Hilbert actúa como el artículo definido 'el' en castellano. Por ejemplo, si representamos el predicado "x es hoy rey de Francia" con $\Re(x)$ y "x es calvo" con $C(x)$ el ejemplo de Russell "El actual rey de Francia es calvo" puede escribirse $C\left(\tau x\Re(x)\right)$. Sin embargo, el término designado $\xi = \tau x\Re(x)$ no satisface la relación $\Re(\xi)$ y por lo tanto, designa el conjunto vacío $\varnothing$. Y como el conjunto vacío no es calvo, la proposición es falsa.

La unicidad es tan importante que existe una notación especial para indicar que "existe un único x tal que P":

$$\exists ! \boldsymbol{x}\boldsymbol{P(x)} \stackrel{\text{def}}{=} \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P(x)} \wedge \text{único } x) \tag{3.4}$$

Usarmos esta notación ocasionalmente.

3.2 Clases

El lenguaje que hemos desarrollado hasta ahora, que se llama *lógica predicativa de primer orden,* nos permite tratar con predicados arbitrarios, pero no nos permite hablar de "todos los predicados" o "algunas relaciones"; es decir, no permite cuantificar sobre los predicados. Esto es un inconveniente, tanto para el desarrollo de la matemática como de las ciencias naturales.

Sin embargo, permitir la cuantificación sobre predicados trae muchas dificultades difíciles de salvar y un lenguaje difícil de manejar. En lugar de ello, introduciremos la noción de *clase* de objetos y veremos que trabajar con ellas permite reemplazar ventajosamente la cuantificación sobre predicados.

3.2.1 La noción de clase

Intuitivamente, una clase es un nuevo tipo de objeto, formada por todos los objetos que tienen alguna propiedad común. Si $P(x)$ es el atributo correspondiente a esta propiedad, la clase P está formada por aquellos objetos z para los cuales $P(z)$ es verdadero. Usaremos la notación $\{x \mid P(x)\}$ para la clase de objetos que satisfacen el atributo $P(x)$. Diremos que estos objetos *pertenecen* a $\{z \mid P(z)\}$ (o también que son *elementos* de la misma) y lo indicaremos en la forma: $z \in \{z \mid P(z)\}$. De estas consideraciones intuitivas deducimos la equivalencia:

$$P(x) \Leftrightarrow x \in \{z \mid P(z)\} \tag{3.5}$$

que se llama *Principio de Quine* y que muestra la correspondencia entre la noción de clase y la de atributo. Diremos que la ecuación (3.5) define una clase por *comprehensión.* La `FBF` $\{x \mid P(x)\}$ se llama el *clasificador.*

Ejemplo 3.1 (Clase vacía).
Cualquier contradicción define una clase que no tiene elementos. Esta clase se llama la *clase vacía.* Por ejemplo:

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$$

Ejemplo 3.2 (Singulete).
La clase que tiene un único elemento se llama *singulete* o *clase singular*:

$$\{a\} = \{x \mid x = a\}$$

Un singulete debe distinguirse cuidadosamente del elemento que lo compone. La relación entre ambos es similar a la relación existente entre un tigre y la jaula que lo contiene[1].

Ejemplo 3.3 (Clase universal).
La clase universal $\mathcal{U}$ es la clase de todas las clases.

$$\mathcal{U} = \{x \mid x = x\}$$

Para poder cuantificar sobre clases, introduciremos términos que describan clases; es decir, variables para clases y cuantificaremos sobre ellas. Así, en vez de hablar de "todos los predicados", hablaremos de "todas las clases".

Aunque una clase de objetos está determinada por un predicado, distintos predicados pueden estar satisfechos por los mismos objetos. Por ejemplo, los predicados:

$$\ulcorner x \text{ es un triángulo equilátero} \urcorner \Leftrightarrow \ulcorner x \text{ es un triángulo equiángulo} \urcorner$$

[1] ¡Vale la pena disitnguirlos!

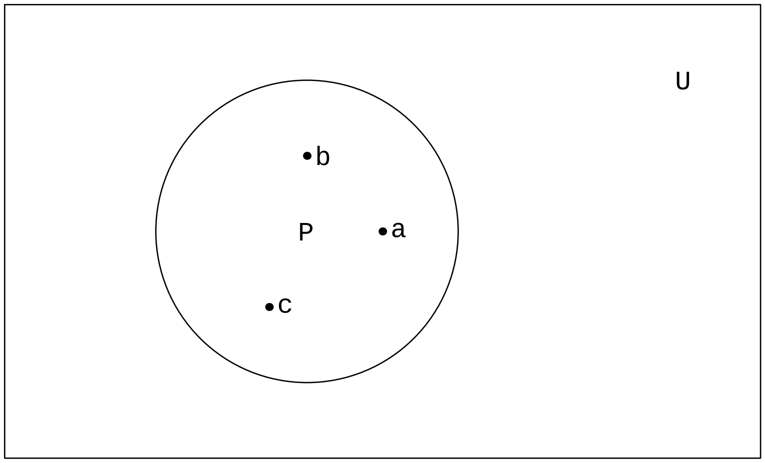


Figura 3.1: Ejemplo de diagrama de Euler

son equivalentes para todo x, así como[2]

$$\ulcorner x \text{ es un bípedo implume} \urcorner \Leftrightarrow \ulcorner x \text{ es un animal racional} \urcorner$$

Diremos que ambas clases tienen la misma *extensión*. Cabe preguntarse si las clases definidas por dos predicados con la misma extensión son las mismas. Admitiremos que sí; es decir, que las clases están determinadas sólo por sus elementos. Esto es un axioma llamado el *principio de extensión*:

Axioma 3.1 (Principio de extensión).
Dos clases son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

De este postulado deducimos que la clase de triángulos equiláteros es la misma que la de triángulos equiángulos y que la clase de los bípedos implumes (aunque parezca mentira) es la misma que la de los animales racionales. También deducimos que la clase determinada por un predicado es un objeto único y podemos definirla con la relación:

$$\{x \mid P(x)\} = \tau x \forall z[z \in x \Rightarrow P(z)] \tag{3.6}$$

que nos enseña que es el único objeto formado por todos los objetos que satisfacen el atributo $P(z)$; y además que x es una variable ligada (inexistente) en la expresión $\{x \mid P(x)\}$.

La introducción de las clases permite representar en forma intuitiva relaciones entre distintos predicados. Para hacerlo, introduciremos los *diagramas de Euler*. Representaremos nuestro universo de discurso U por un área en el plano (por ejemplo, un rectángulo suficientemente grande) y distintas clases de objetos por áreas dentro de ese rectángulo. La figura 3.1 muestra las un ejemplo de diagrama de Euler. En la sección 3.2.2 los aplicaremos para desarrollar un álgebra de clases.

3.2.2 Álgebra de Clases

Es posible definir relaciones entre clases y también operaciones sobre ellas, que reflejan el álgebra de los conectivos lógicos (cf. secciones 2.3 y 2.5.5). La figura 3.2 muestra diagramas de Euler que representan gráficamente las operaciones descritas.

[2] Se trata de un ejemplo favorito de los filósofos, ¡aunque su validez sea más que dudosa!

Comenzaremos introduciendo la noción de subclase, análoga a la de implicación:

Definición 3.1 (Subclase).
P es una *subclase* de Q si si todos los elementos de P son también elementos de Q.

$$P \subset Q \stackrel{\text{def}}{=} \forall x (x \in P \Rightarrow x \in Q)$$

Obsérvese que con esta definición una subclase de Q puede ser igual a Q. Una *subclase propia* es:

$$P \subsetneq Q \stackrel{\text{def}}{=} P \subset Q \wedge P \neq Q \tag{3.7}$$

Teorema 3.4.
La clase vacía es una subclase de cualquier clase P.

Demostración. Cualquier contradicción implica todas las proposiciones, (Cf. Ejemplo 2.5) y por lo tanto:

$$x \in \varnothing \Leftrightarrow x \neq x \Rightarrow x \in P$$

□

El análogo de la negación es el *complemento* de una clase:

Definición 3.2 (Complemento).
La clase $\complement P$ está formada por los elementos de U que no pertenecen a P:

$$\complement P = \{x \mid \neg P(x)\}$$

Podemos definir otras operaciones sobre clases análogas a los operadores 'o' e 'y':

Definición 3.3 (Unión).
La *unión* de dos clases es la clase formada por los elementos de cualquiera de esas clases:

$$P \cup Q = \{x \mid x \in P \vee x \in Q\}$$

Definición 3.4 (Intersección).
La *intersección* de dos clases es la clase formada por los elementos que pertenecen a ambos conjuntos:

$$P \cap Q = \{x \mid x \in P \wedge x \in Q\}$$

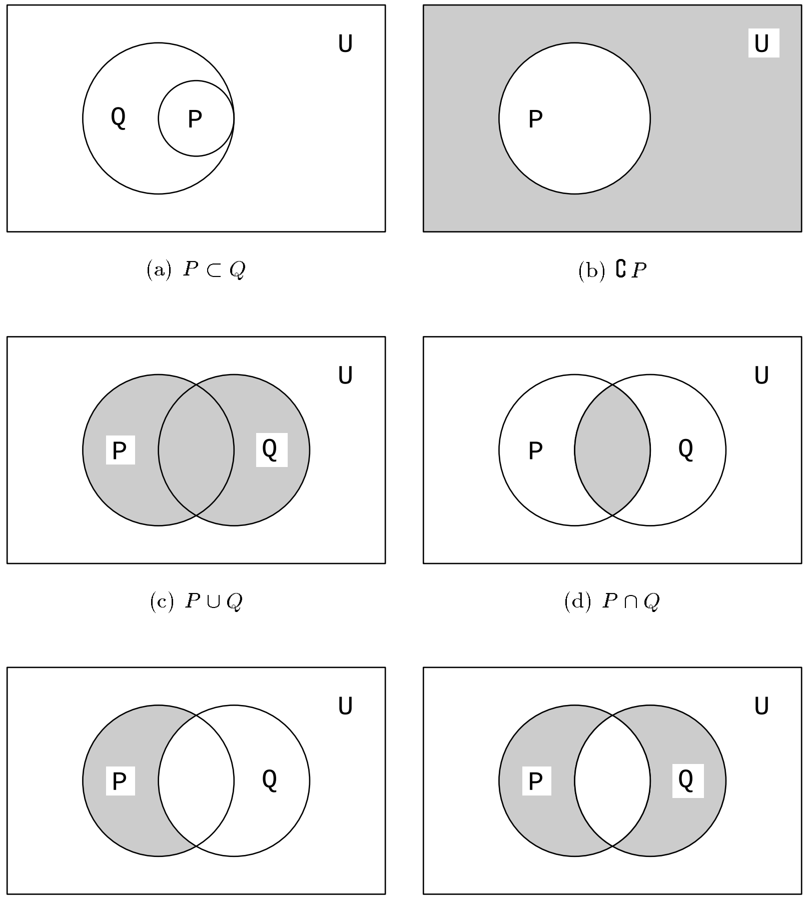
Las operaciones de unión, intersección y complemento satisfacen propiedades similares a la de los operadores lógicos correspondientes:

Teorema 3.5 (Leyes de de Morgan).

$$\complement (P \cup Q) = (\complement P \cap \complement Q)$$
$$\complement (P \cap Q) = (\complement P \cup \complement Q)$$

Teorema 3.6 (Propiedad conmutativa).

$$(P \cup Q) = (Q \cup P)$$
$$(P \cap Q) = (Q \cap P)$$



(a) $P \subset Q$ (b) $\complement P$

(c) $P \cup Q$ (d) $P \cap Q$

(e) $P - Q$ (f) $P \triangle Q$

Figura 3.2: Operaciones y relaciones entre clases

Teorema 3.7 (Propiedad distributiva).

$$[P \cup (Q \cap R)] = [(P \cup Q) \cap (P \cup R)]$$
$$[P \cap (Q \cup R)] = [(P \cap Q) \cup (P \cap R)]$$

Teorema 3.8 (Propiedad asociativa).

$$[P \cup (Q \cup R)] = [(P \cup Q) \cup R]$$
$$[P \cap (Q \cap R)] = [(P \cap Q) \cap R]$$

Estas identidades pueden comprobarse fácilemnte usando diagramas de Euler.

Finalmente, dos operaciones que establecen diferencias entre clases. La primera, la diferencia de dos conjuntos es:

Definición 3.5 (Diferencia).
La diferencia $P - Q$ entre dos clases es la clase de los elementos de P que no pertnenecen a Q:

$$P - Q = \{x \mid x \in P \wedge x \notin Q\}$$

Como se ve en la figura 3.2, esta operación no es simétrica entre las dos clases: refleja sólo aquello que hace a P diferente de Q. Una operación simétrica entre ambos conjuntos es:

Definición 3.6 (Diferencia simétrica).
La diferencia simétrica $P \triangle Q$ entre dos clases es la unión de las diferencias:

$$P \triangle Q = P - Q \cup Q - P$$

Existen varias otras identidades entre las distintas clases y operaciones cuya demostración se deja como ejercicio. Por ejemplo:

Teorema 3.9 (Complemento como diferencia).

$$\complement P = U - P$$

Teorema 3.10 (Diferencia como intersección).

$$P - Q = P \cap \complement Q$$

Teorema 3.11 (Diferencia simétrica como intersección).

$$P \triangle Q = (P \cup Q) \cap \complement(P \cap Q)$$

3.2.3 Clases de clases

La razón más importante para introducir las clases es que con ellas se puede cuantificar sobre predicados. Para hacerlo, basta cuantificar sobre las clases en la misma forma en que se cuantifica sobre los elementos. Por ejemplo, una biblioteca B es una clase de libros l con una propiedad común $P(l)$ (por ejemplo, la de pertenecer al mismo catálogo). Las oraciones

$$\mathcal{B}_A = \ulcorner\text{Las bibliotecas argentinas}\urcorner \tag{3.8}$$
$$\mathcal{B}_X = \ulcorner\text{Las bibliotecas de la Facultad}\urcorner \tag{3.9}$$

definen dos clases cuyos elementos son clases. Otros ejemplos son:

$$\ulcorner\text{Hay malas bibliotecas}\urcorner \tag{3.10}$$
$$\ulcorner\text{Algunas bibliotecas son públicas}\urcorner \tag{3.11}$$

Un ejemplo muy importante de clase de clases es el *conjunto de las partes*:

Definición 3.7 (Conjunto de las partes).
El conjunto de las partes (o *clase potencia*) de A es la clase de todas las partes de A:

$$\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$, entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) = \{&\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \\ &\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}\end{aligned} \tag{3.12}$$

Otro ejemplo importante es la *clase unión* de una clase de clases A.

Definición 3.8 (Clase unión).
La clase unión de A, $\bigcup(A)$ es la clase formada por los elementos de las clases de A:

$$\bigcup(A) = \{x \mid \forall b(x \in b \wedge b \in A)\}$$

U A	A:	$\ulcorner$Todo S es $P\urcorner$	$\ulcorner\forall x[S(x) \Rightarrow P(x)]\urcorner$	$\ulcorner\forall_S x P(x)\urcorner$
U N	E:	$\ulcorner$Ningún S es $P\urcorner$	$\ulcorner\forall x[S(x) \Rightarrow \neg P(x)]\urcorner$	$\ulcorner\forall_S x \neg P(x)\urcorner$
P A	I:	$\ulcorner$Algún S es $P\urcorner$	$\ulcorner\exists x[S(x) \wedge P(x)]\urcorner$	$\ulcorner\exists_S x P(x)\urcorner$
P N	O:	$\ulcorner$Algún S no es $P\urcorner$	$\ulcorner\exists x[S(x) \wedge \neg P(x)]\urcorner$	$\ulcorner\exists_S x \neg P(x)\urcorner$

Tabla 3.1: Forma canónica de las proposiciones categóricas

Por ejemplo, el conjunto unión de las bibliotecas de la Facultad de Ciencias Exactas, es el conjunto de todos los libros que integran la facultad, pero sin repetir ninguno[3].

En forma análoga se define la clase intersección

Ejercicio 3.1 (Clase intersección).
Definir la clase intersección de una clase de clases.

3.3 La lógica tradicional

La lógica aristotélica ha sido la base de la filosofía hasta fines del siglo pasado. En esta sección mostraremos con ejemplos que toda ella puede tratarse en el marco de la lógica simbólica. Tratamientos más completos pueden verse en las referencias [42, 72].

3.3.1 Las proposiciones categóricas

La lógica tradicional trabaja sobre la base de *proposiciones categóricas*, en la forma `sujeto-predicado`. Estas proposiciones se clasifican en cuatro tipos, según su extensión (Universal o Particular) y su caracter (Afirmativa o Negativa). La tabla 3.1 muestra las formas de esas proposiciones y su traducción simbólica. La primera columna de la tabla muestra el *tipo* de la proposición; la segunda su nombre tradicional, la tercera su forma "sujeto-predicado" y las dos últimas su traducción al lenguaje simbólico en forma completa y tipificada (cf sección 2.3.4). Así, las proposiciones

$$\ulcorner\text{Todos los hombres son mortales}\urcorner$$
$$\ulcorner\text{Algunos generales son cobardes}\urcorner$$

que tienen los tipos A e I respectivamente, pueden traducirse en la forma

$$\forall x[H(x) \Rightarrow M(x)] \Leftrightarrow \forall_H x M(x)$$
$$\exists x[G(x) \wedge C(x)] \Leftrightarrow \exists_G x C(x)$$

La última puede leerse en la forma "Hay algo que es general y cobarde".

3.3.2 Inferencias inmediatas

En la lógica tradicional hay varias transformaciones, llamadas "inferencias inmediatas", que solían resumirse en el llamado *Cuadro de oposición* (Fig. 3.3). La mayoría de estas inferencias, sin embargo suponen que existe al menos un elemento en las clases S y P, el llamdo "presupuesto existencial". Por esta razón, las indicadas por líneas de punto sólo son válidas si se añaden los axiomas $\ulcorner S \neq \varnothing\urcorner$ y $\ulcorner P \neq \varnothing\urcorner$ [42, Cap. 5].

[3] Por ejemplo, regalando los ejemplares repetidos

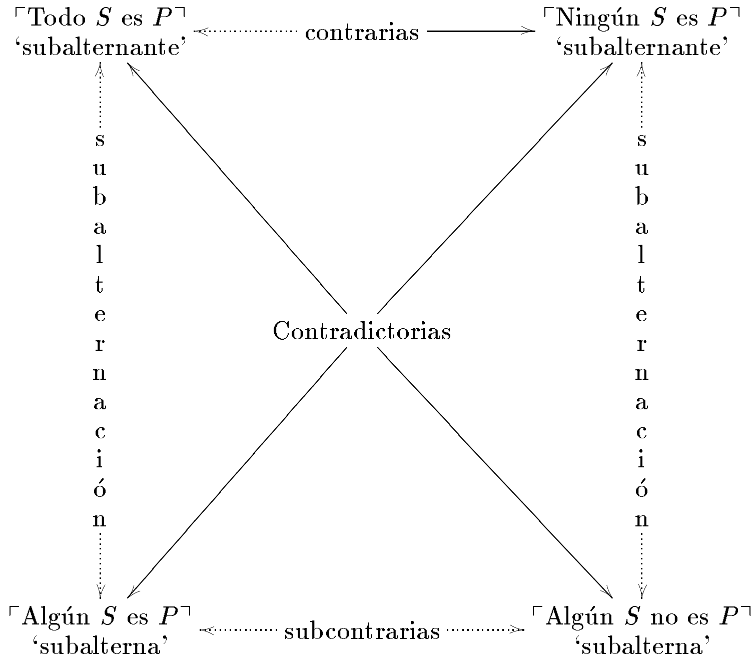


Figura 3.3: Cuadro de oposición en la lógica tradicional

Las inferencias entre contradictorias (la verdad de una implica la falsedad de la otra) son, en cambio, simpre válidas. Otras formas de inferencia, como la *obversión*, también lo son. Esta última transforma ⌜Todo S es P⌝ en ⌜Ningún S es no-P⌝ y es, obviamente, consecuencia de la defininción 2.47 del cuantificador universal. Otras formas de inferencia como la *conversión*, por otra parte, sólo son válidas si se añaden los axiomas ⌜$S \neq \varnothing$⌝ y ⌜$P \neq \varnothing$⌝ [42, Cap. 5].

3.3.3 El silogismo clásico

La teoría de clases que hemos desarrollado en esta sección es suficiente para analizar el silogismo aristotélico.

Ejemplo 3.4 (Silogismo "Barbara").
Examinemos un ejemplo clásico de silogsismo en el modo "Barbara":

⌜Todos los hombres son mortales⌝
⌜Todos los filósofos son hombres⌝
∴ ⌜Todos los filósofos son mortales⌝

Introduzcamos los predicados

$$M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ulcorner x \text{ es mortal} \urcorner$$

$$H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ulcorner x \text{ es hombre} \urcorner$$

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ulcorner x \text{ es filósofo} \urcorner$$

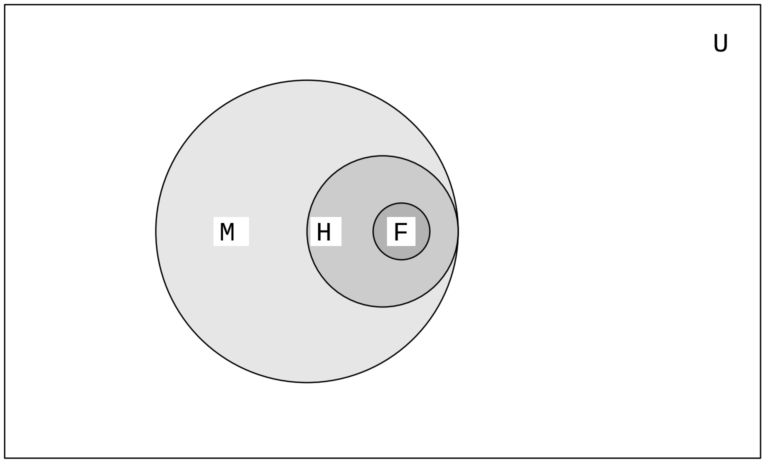


Figura 3.4: Inclusión de clases en el silogismo “Barbara”

Obtenemos la demostración de la conclusión en la forma:

$$\begin{aligned}
\forall x[H(x) &\Rightarrow M(x)] \\
H(x) &\Rightarrow M(x) \\
\forall x[F(x) &\Rightarrow H(x)] \\
F(x) &\Rightarrow H(x) \\
F(x) &\Rightarrow M(x) \\
\forall x[F(x) &\Rightarrow M(x)]
\end{aligned}$$

Los pasos intermedios en esta prolija demostración se saltean en el trabajo cotidiano del científico: no son necesarios una vez que se domina una técnica y la del silogismo es muy sencilla de aprender. Una forma muy sencilla de ver la conclusión es observar que las clases correspondientes están conectadas por la relación de inclusión en la forma:

$$F \subsetneq H \subsetneq M$$

como lo muestra la figura 3.4.

3.4 Teoría de conjuntos

En las secciones anteriores hemos resumido la teoría de clases en forma intuitiva, como una construcción auxiliar para cuantificar sobre predicados. La teoría intuitiva, sin embargo, no es suficiente para tratar problemas sutiles de la teoría; en particular, para analizar en forma general la noción de clase. Como veremos enseguida, la cuantificación sobre todas las clases, si no se hace en un marco axiomático cuidadoso, conduce a contradicciones. En esta sección, esbozaremos una teoría axiomática de clases y conjuntos y examinaremos algunos tópicos “avanzados” de la teoría.

3.4.1 La paradoja de Russell

La paradoja descubierta por Russell [122] mostró que el uso intuitivo de la teoría de clases era inseguro y podía conducir a la catástrofe. En realidad, esta paradoja tiene sus raíces en la Paradoja del Mentiroso, que ya hemos analizado (Sec. 1.2).

Ahora bien, por el principio de Quine (3.5) todo predicado $P(x)$ define una clase que, además, es única por el Principio de Extensión (Ax. 3.1).

Examinemos ahora la relación de pertenencia a una clase $\ulcorner\in\urcorner$, definida por el Principio de Quine. Intuitivamente, podemos particionar las clases en dos grupos: las "clases regulares", que no son elementos de sí mismas, $x \notin x$ (como la clase de los perros, que no es un perro) o las "irregulares", que sí lo son (como la clase de los conceptos, que es un concepto).

Definición 3.9 (Clase de Russell).
La *clase de Russell* es la clase de todas las clases regulares:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

Ahora bien ¿es $\mathcal{R}$ regular? Usando el Principio de Quine hallamos:

$$\mathcal{R} \notin \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R} \in \{x \mid x \notin x\} \Leftrightarrow \mathcal{R} \in \mathcal{R} \tag{3.13}$$

que nos dice que $\mathcal{R}$ es regular si y sólo si no es regular.

Este resultado es catastrófico: hemos dicho que una inconsistencia genera todas las proposiciones, verdaderas y falsas, de modo que la lógica, completada con la teoría de clases, ¡resulta inútil como lenguaje científico!

La solución de la paradoja de Russell no puede hacerse con la introducción de metalenguajes: es necesario modificar drásticamente la lógica pare evitarla. La solución consiste en limitar el alcance del Principio de Quine: no todo predicado debe generar clases. Hay tres caminos para limitarlo:

Teoría de tipos: Los predicados generan clases de distintos tipos: clases de individuos (elementos primitivos), clases de clases, clases de clases de clases, etc. El universo de discurso Ω queda estratificado en distintas componentes y éstas no deben mezclarse entre sí. Predicados como $\ulcorner\in\urcorner$ conectan clases de distinto tipo y por lo tanto oraciones de la forma $x \in x$ no son `FBF`'s.

Limitación de la complejidad: Los predicados que gneneran clases no deben ser complicados. Es irónico que un predicado de la forma $x \notin x$ se considere complicado, pero en realidad, todos los predicados de esa forma (o también de la forma $x \in y \wedge y \in x$, etc) se consideran "complicados".

Limitación de tamaño: Las clases se dividen en dos grupos: las clases "pequeñas", que se llamarán *conjuntos* y las muy grandes (tales como la clase universal $\mathcal{U}$) que se seguirán llamado clases. Las reglas de formación de clases deben garantizar que las clases de Russell y otras más complejas no sean conjuntos.

En lo que sigue, expondremos una variante de la teoría de limitación de tamaño [1, 50, 7], que resuelve la paradoja de Russell y otras análogas.

Para evitar paradojas como la de Russell, vamos a suponer que ciertas clases tienen una propiedad especial: la de ser *conjuntos*. Simbolizaremos esta propiedad en la forma $\ulcorner \mathtt{C}\,x \urcorner$ que se lee $\ulcorner x$ es un conjunto$\urcorner$. La distinción entre un conjunto y una clase última (es decir, que no es un conjunto) es sutil y queda expresada por un grupo de esquemas y axiomas que definen la teoría.

3.4.2 Axiomas de la teoría

Usaremos como lenguaje la lógica, tal como ha sido explicada en los capítulos 2 y 3, incluyendo la teoría de la igualdad (Sec. 3.1). Las dificultades comienzan con la introducción de la noción de clase (Sec. 3.2) y ésta es la parte que debemos revisar.

En primer lugar, Aceptaremos el Principio de Extensionalidad para las clases (Ax. 3.1), por las razones intuitivas expuestas en la sección 3.2.1 pero, para evitar las paradojas, cambiaremos el Principio de Quine.

La dificultad con el Principio de Quine es que permite definir una clase por comprehensión sin ninguna limitación. Es esta enorme flexibilidad la que genera la contradicción (3.13). Para evitarla, impondremos la siguiente limitación: un predicado $\boldsymbol{P(x)}$ genera una clase si sólo lo satisfacen *conjuntos*. Enunciaremos este principio en forma de esquema de axioma:

Esquema 3.3 (Principio de comprehensión para clases).
Hay una clase P formada por los conjuntos x que satisfacen el predicado $\boldsymbol{P}(x)$:

$$[\boldsymbol{P}(x) \Rightarrow \mathtt{C}\, x] \Rightarrow \exists P \forall x\, [x \in P \Leftrightarrow \boldsymbol{P}(x)]$$

Con este esquema de axioma, y el principio de extensión deducimos que $\boldsymbol{z}$ es un objeto único y podemos introducir el clasificador en forma análoga a (3.6). Sin embargo, cambiaremos su definición para ajustarnos al esquema 3.3:

Definición 3.10 (Clasificador).

$$\{x \mid \boldsymbol{P}(x)\} = \tau \boldsymbol{x} \forall z\, [z \in x \Leftrightarrow \boldsymbol{P}(z) \wedge \mathtt{C}\, x]$$

Estos dos cambios son suficientes para hacer desaparecer la paradoja de Russell: la demostración (3.13) se reduce a probar que la clase de Russell no es un conjunto.

Ejercicio 3.2 (Paradoja de Russell).
Mostrar que $\neg\, \mathtt{C}\, \mathcal{R}$.

El esquema 3.3 nos dice cómo construir una clase P que sean equivalente a un predicado $\boldsymbol{P}$, si se dispone de conjuntos x como para formarla, pero nada nos dice acerca de la existencia de conjuntos. Un principio de comprehensión para conjuntos es algo más difícil de enunciar, si se quiere evitar las paradojas. Observemos, ante todo, que si bien el predicado $\boldsymbol{P}$ está bien definido (en el sentido de que, en principio, puede determinarse si un objeto x lo satisface o no), no ocurre lo mismo con el signo '$\mathtt{C}$'. Este último está asociado a la noción general de conjunto, que es la que deseamos caracterizar con los axiomas de la teoría. En un principio de comprehensión para conjuntos, pues, el predicado $\boldsymbol{P}$ no debería contener el signo '$\mathtt{C}$'; de otro modo caeríamos en un círculo vicioso: ¡definir un conjunto usando la noción de conjunto! Llamaremos *condición débilmente predicativa*[4] a un predicado $\boldsymbol{P_0(x_{,1}, \ldots x_n)}$ que no contenga el signo '$\mathtt{C}$' en su definición.

Para ser débilmente predicativa, $\boldsymbol{P}$ tampoco debería contener clases últimas como variables libres: éstas deberían ser siempre conjuntos.

Estas consideraciones intuitivas conducen a enunciar:

Esquema 3.4 (Principio de comprehensión para conjuntos).
Si las únicas clases que satisfacen la condición débilmente predicativa $\boldsymbol{P_0}$ son conjuntos, existe un conjunto *z formado por los conjuntos que satisfacen $\boldsymbol{P_0}$:*

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \mathtt{C}\, x_i\right) \Rightarrow \{\forall x\, [\boldsymbol{P_0}(x) \Rightarrow \mathtt{C}\, x] \Rightarrow \exists z\, [\forall u\, (u \in z \Leftrightarrow \boldsymbol{P_0}(z)) \wedge \mathtt{C}\, u]\}$$

Es necesario ahora establecer qué predicados satisfacen la condición $\boldsymbol{P_0}(x) \Rightarrow \mathtt{C}\, x$. Sorprendentemente, sólo dos son necesarias, que enunciamos como axiomas:

[4] Se llama *impredicativo* a un constructo que contenga un círculo vicioso: el ente definido entra en la definición. Aclaremos que las definiciones recursivas (Sec. 1.5.4) son *predicativas* pues aunque el ente definido entra en la definición, lo hace de modo tal que se puede eliminar su presencia de un número finito de pasos

Axioma 3.2 (Axioma de la herencia).
Un elemento de un conjunto es otro conjunto:

$$\mathtt{C}\, y \Rightarrow (x \in y \Rightarrow \mathtt{C}\, x)$$

Axioma 3.3 (Axioma de las partes).
Una parte de un conjunto es otro conjunto:

$$\mathtt{C}\, y \Rightarrow (x \subseteq y \Rightarrow \mathtt{C}\, x)$$

Ejercicio 3.3 (La clase universal no es un conjunto).
Probar que la clase universal $\mathcal{U}$ no es un conjunto: $\neg\, \mathtt{C}\, \mathcal{U}$.

Finalmente, incluiremos un axioma de caracter técnico:

Axioma 3.4 (Axioma de regularidad).
Todos los conjuntos son regulares:

$$y \neq \varnothing \wedge \mathtt{C}\, y \Rightarrow \exists x[u \in y \wedge (u \cap y = \varnothing)]$$

3.4.3 Algunos teoremas

Demostremos ahora que algunas de las clases que hemos utilizado en los capítulos anteriores existen y son conjuntos.

Teorema 3.12 (Existencia del conjunto vacío).

$$\exists y[\mathtt{C}\, y \wedge \forall x(x \in y \Rightarrow x \neq x)]$$

Demostración. Como $\forall x(x \neq x \Rightarrow \mathtt{C}\, x)$ y el esquema 3.4 implica:

$$\forall x(x \neq x \Rightarrow \mathtt{C}\, x) \Rightarrow \exists y[\mathtt{C}\, y \wedge \forall x(x \in y \Rightarrow x \neq x)]$$

se deduce la conclusión. □

Teorema 3.13 (Existencia de pares desordenados).

$$\mathtt{C}\, a \wedge \mathtt{C}\, b \Rightarrow \exists z[\mathtt{C}\, z \wedge \forall u(u \in z \Rightarrow u = a \vee u = b)]$$

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Teorema 3.14 (Existencia del conjunto unión).

$$\mathtt{C}\, x \Rightarrow \exists y[\mathtt{C}\, y \wedge \forall z(z \in y \Leftrightarrow \exists u(z \in u \wedge u \in x))]$$

Demostración. Por el axioma de la herencia deducimos:

$$(\mathtt{C}\, x \wedge u \in x) \Rightarrow \mathtt{C}\, u$$
$$(\mathtt{C}\, u \wedge z \in u) \Rightarrow \mathtt{C}\, z$$

y de ambas:

$$\mathtt{C}\, x \wedge u \in x \wedge z \in u \Rightarrow \mathtt{C}\, z$$

Cambiando a una forma equivalente y cuantificando sobre z y u hallamos:

$$\mathtt{C}\, x \Rightarrow \forall z[\exists u(u \in x \wedge z \in u) \Rightarrow \mathtt{C}\, z]$$

y con ayuda del esquema 3.4 se deduce la conclusión. □

Teorema 3.15 (Existencia del conjunto de las partes).

$$\mathtt{C}\,y \Rightarrow \exists z[\mathtt{C}\,z \wedge (x \in z \Leftrightarrow x \subseteq y)]$$

Teorema 3.16 (Principio de separación).
Sea $\boldsymbol{P(x)}$ una FBF que contiene la variable x (y eventualmente, parámetros z_i. Sea y un conjunto cualquiera. Entonces, existe un conjunto z formado por los elementos de y qye satisfacen $\boldsymbol{P}(x)$.

$$\mathtt{C}\,y \Rightarrow \exists z[\mathtt{C}\,z \wedge \forall x[x \in z \Leftrightarrow (\boldsymbol{P}(x) \wedge x \in y)]$$

Demostración. Del axioma de la herencia:

$$\mathtt{C}\,y \Rightarrow \forall x[(\boldsymbol{P}(x) \wedge x \in y) \Rightarrow \mathtt{C}\,x]$$

Usando el esquema 3.3 hallamos:

$$\mathtt{C}\,y \Rightarrow \exists z \forall x[x \in z \Leftrightarrow (\boldsymbol{P}(x) \wedge x \in y)]$$

Pero como:

$$\forall x[x \in z \Leftrightarrow (\boldsymbol{P}(x) \wedge x \in y)] \Rightarrow z \subseteq y$$

el axioma de las partes proporciona:

$$\{\mathtt{C}\,y \Rightarrow \forall x[x \in z \Leftrightarrow (\boldsymbol{P}(x) \wedge x \in y)]\} \Rightarrow \mathtt{C}\,x$$

Finalmente, el resultado surge de aplicar el esquema 3.4 a esta última expresión. □

3.4.4 El principio de elección

Entre los temas "avanzados" de la teoría de conjuntos el *principio de elección* de Zermelo [100, 50, 14]. Intuitivamente, el principio de Zermelo afirma que dada una familia de conjuntos, es posible formar otro conjunto "eligiendo" un elemento de cada uno de los miembros de la familia. Con más precisión:

Teorema 3.17 (Principio de elección).
Si M es un conjunto de conjuntos no vacíos y disjuntos de a pares, existe un conjunto que tiene exactamente un elemento de cada $y \in M$.

Demostración. En efecto, sea la clase:

$$\{x \mid \exists(y)_M[x = \tau z(z \in y)]\}$$

formada tomando "un" elemento $\tau z(z \in y)$ de cada conjunto de M. Pero esta clase es un conjunto, por ser una parte del conjunto unión de M (Teor. 3.14 y Axioma 3.3). □

El principio de elección fue presentado como axioma por Zermelo (Axioma de elección) y provocó grandes controversias a principios de siglo, originadas en su interpretación intuitiva. Su consistencia fue probada posteriormente por G$^{\underline{o}}$del (Véase [50, II, §4]). El principio de elección juega un papel muy importante en la teoría de conjuntos, en ramas de la matemática como el álgebra y la topología e, indirectamente, en las aplicaciones. Por esta razón se han probado numerosos teoremas equivalentes al principio de elección [100, 50].

3.4.5 El infinito

Muchos de los problemas que se presentan en las aplicaciones de la lógica a otras ciencias, sólo requieren tratar con clases (o conjuntos) *finitos*, es decir, aquellos para los cuales existe una biyección con el conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Problemas de este tipo son la aritmética, la estadística de poblaciones o la clasificación de especies biológicas.

Sin embargo, cualquier problema sobre la evolución temporal de un sistema físico o biológico requiere tratar conjuntos *infinitos* de instantes, de posiciones de un móvil ...

Existe una dificultad con la definición anterior: la noción de número se construye con la de conjunto y el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es infinito. Se puede evitar esta circularidad definiendo indirectamente un conjunto infinito. Para hacerlo, observemos que conocemos ya un conjunto: $\varnothing$. Con él podemos formar otro: $\{\varnothing\}$. Con estos dos conjuntos, podemos formar un tercero: $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ y con los anteriores, se pueden formar: $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, etc. El conjuto infinito se construye formado todas esas "cajas dentro de cajas ... " y agrupándolas.

El siguiente teorema garantiza la existencia de conjuntos infinitos:

Teorema 3.18 (Principio del infinito).
Existe un conjunto a que contiene el conjunto vacío $\varnothing$ y tal que si $x \in a$ e $y \in a$ también $(x \cup \{y\}) \in a$.

$$\exists a[\varnothing \in a \land \forall(x)_a \forall(y)_a (x \cup \{y\} \in a)]$$

Demostración. Sea

$$\boldsymbol{P}(x) = \forall B[\varnothing \in B \land \forall(x)_B \forall(y)_B (x \cup \{y\} \in B) \Rightarrow x \in B] \tag{3.14}$$

una condición sobre x. La clase universal $\mathcal{U}$ satisface los requerimientos sobre B, por los teoremas 3.12 y 3.14. Por lo tanto, $\boldsymbol{P}(x) \Rightarrow \mathtt{C}\, x$ y la condición es débilmente predicativa. Por el esquema 3.4 existe un conjunto a formado por los x que satisfacen $\boldsymbol{P}(x)$. $\square$

La construcción de las nociones de número, límite y otras necesarias para el desarrollo del análisis y las matemáticas pueden verse en la bibliografía [14, 112, 84, 7, 8, 103].

3.4.6 Conjuntos de objetos

Los axiomas que introdujimos en la sección 3.4.2 sólo garantizan la existencia de conjuntos formados por conjuntos ("cajas dentro de cajas dentro de cajas ... "). Pero en la aplicación de la teoría de conjuntos al mundo real, es necesario trabajar con conjuntos formados por objetos reales[5] y por lo tanto, modificaremos los axiomas de la sección 3.4.2 para incluirlos.

Introduciremos un nuevo predicado $\ulcorner \Theta(x) \urcorner$ que se lee "x es una cosa" o "x es un objeto real". El predicado:

$$\mathrm{Ob}\, x = \mathtt{C}\, x \lor \Theta\, x \tag{3.15}$$

se lee "x es un objeto". Extenderemos la noción de una condición débilmente predicativa: como un predicado $\boldsymbol{P_0(x_{,1}, \ldots x_n)}$ que no contenga el signo 'Ob' en su definición. Ahora podemos reformular los axiomas anteriores con sencillez:

1. Hay una clase P formada por los objetos x que satisfacen el predicado $\boldsymbol{P}(x)$.

[5] El nombre tradicional en lógica es "individuos". Pero en este curso, usaremos "individuo" para designar ciertos constructos especiales (Sec. 8.1).

2. Si las únicas clases que satisfacen la condición débilmente predicativa $\boldsymbol{P_0}$ son objetos, existe un *conjunto* z formado por los objetos que satisfacen $\boldsymbol{P_0}$.

3. Un elemento de un conjunto es un objeto.

Los otros axiomas no necesitan cambios.

Ejercicio 3.4.
Escribir formalmente los axiomas de la teoría de conjuntos con objetos.

Capítulo 4

Relaciones

En el capítulo 3 anteriores hemos desarrollado en forma intuitiva la teoría de clases o conjuntos. En el presente, además de introducir las clases asociadas a una relación, examinaremos varios tipos importantes de relaciones entre conjuntos.

4.1 Correspondencia

En la sección 3.2 introdujimos la noción de clase de objetos como equivalente a satisfacer un predicado (3.5). Esta definición permite reemplazar a todos los predicados unarios $P(x)$ por la noción más intuitiva de pertenencia a una clase $z \in \{x \mid P(x)\}$. Sin embargo, esto no acanza para trabajar con predicados más complejos, tales como las relaciones binarias. En esta sección generalizaremos la noción de clase como para tratar estos casos más generales.

4.1.1 Pares

Las relaciones binarias conectan, de alguna manera, pares de elementos pertenecientes a dos clases (que pueden ser las mismas). Una primera definición de un par de elementos es:

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\} \tag{4.1}$$

pero esta definición no es suficiente pues, por el principio de extensión $\{a, b\} = \{b, a\}$. Las relaciones distinguen entre los elementos a y b: $a < b$ es muy distinto que $b < a$. De alguna manera hay que marcar uno de los elementos para distinguirlo del otro. Esto se logra con la definición de Wiener-Kuratowski de *par ordenado* o *dupla*:

Definición 4.1 (Dupla (Par ordenado)).
Una dupla es el conjunto:

$$\langle a, b\rangle = \{a, \{a, b\}\}$$

Esta triquiñuela pone una marca en el elemento a usando únicamente la noción de clase. Usando el principio de extensión puede demostrarse sin dificultades:

Teorema 4.1.

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \Leftrightarrow a = b \wedge c = d$$

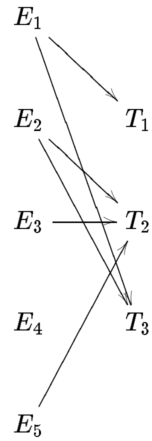


Figura 4.1: Ejemplo de relación: Uso de teléfonos

Los elementos x, y del par $\langle x, y\rangle$ se llaman la *primera y segunda coordenada,* respectivamente.

Teniendo los pares ordenados, podemos definir tripletes, cuadrupletes ... Por ejemplo, un triplete ordenado se define:

Definición 4.2 (Triplete).

$$\langle a, b, c\rangle = \langle\langle a, b\rangle, c\rangle$$

Un uso muy importante de las n-uplas es la definición de objetos nuevos. Por ejemplo, hemos definido una gramática generativa (Sec. 1.5.2) como la cuádrupla $G = \langle V_T, V_N, X_0, F\rangle$. Pero el más importante es la representación de relaciones como clases de n-uplas. Comencemos por el caso más simple: las relaciones binarias.

Definición 4.3 (Gráfica de una relación).
Se llama la *gráfica* de una relación binaria $\doteqdot$ a la clase:

$$G(\doteqdot) \overset{\text{def}}{=} \{\langle x, y\rangle \mid x \doteqdot y\}$$

La gráfica de una relación binaria es, pues, la clase de pares ordenados que satisfacen la relación dada. Se generaliza la noción de coordenada a una gráfica:

Definición 4.4 (Proyección).
La primera proyección de G es la clase de las primeras coordenadas:

$$\mathrm{pr}_1\, G = \{x \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in G)\}$$

y hay una definición análoga para otras proyecciones.

En el caso de conjuntos de partida y llegda finitos, la relación se puede representar dibujando los conjuntos de partida y de llegada como puntos y uniendo las coordenadas de los pares ordenados con flechas.

Ejemplo 4.1 (Uso de teléfonos).
Un grupo de cinco empleados $E = \langle E_1 \dots E_5\rangle$ de una empresa comparte (por razones de economía) solamente tres teléfonos $T = \langle T_1 \dots T_3\rangle$. La figura 4.1 muestra en qué forma lo hace como una relación binaria. Obsérvese que no todos los elementos de los conjuntos están relacionados: el empleado E_4 (el único que trabaja) no tiene asignado un teléfono.

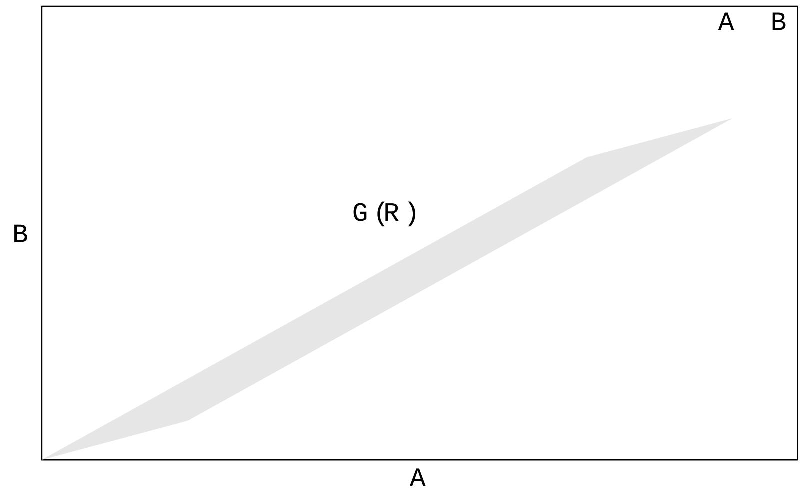


Figura 4.2: Producto cartesiano de A y B. La gráfica de una relación es una parte de $A \times B$.

4.1.2 Producto cartesiano

Es posible dar otra representación gráfica de una relación binaria y, en particular, de los pares ordenados, válida para representar conjuntos más generales. Para ello, introduciremos una noción muy importante en el formalismo:

Definición 4.5 (Producto cartesiano).
El producto cartesiano de las clases A y B es el conjunto de todas las duplas con primer elemento de A y segundo elemento de B:

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

Para representar en forma intuitiva, gráfica, relaciones binarias entre dos clases A y B, representaremos el producto cartesiano de las mismas como una parte del plano (Figura 4.2). Dos rectas ortogonales representarán, simbólicamente, las clases A y B y el área del rectángulo R limitado por las rectas representará el producto cartesiano $A \times B$. Un par odenado se representa por un punto del plano. La gráfica de una relación es una parte de $A \times B$ y la representaremos por un área (o por puntos aislados) dentro de R.

Ejercicio 4.1 (Uso de teléfonos).
Representar la relación de la figura 4.1 como una parte del producto cartesiano.

El producto cartesiano de tres o más clases se define de manera análoga: como la clase de todas las n-uplas de elementos, uno de cada factor.

4.1.3 Correspondencias

Las gráficas, como partes del producto cartesiano de clases, son los elementos necesarios para cuantificar sobre las relaciones. Sin embargo, trabajaremos con clases algo más complejas que las graficas, que describan con precisión las clases que forman el producto cartesiano. Introduciremos, pues, la noción siguiente:

Definición 4.6 (Correspondencia).
Se llama una *correspondencia* entre dos clases A y B al triplete:

$$\Gamma = \langle G, A, B\rangle$$

en donde G es una gráfica tal que $\mathrm{pr}_1 \subseteq A$ y $\mathrm{pr}_2 \subseteq B$. A se llama la *clase (conjunto) de partida* de Γ y B la *clase de llegada*.

Los conjuntos $\mathrm{pr}_1\, G$ y $\mathrm{pr}_2\, G$ se llaman *clase (conjunto) de definición* o *dominio* y *clase de valores* o *imagen* de Γ.

Ejemplo 4.2 (Uso de teléfonos).
El conjunto de definición de la correspondencia es $\langle E_1, E_2, E_3, E_5\rangle$ (el conjunto de los *ñoquis*.

Las correspondencias son los objetos que usaremos para cuantificar sobre relaciones. En lugar de decir "existe una relación binaria entre objetos" diremos: "existe una correspondencia entre dos clases", y locuciones análogas para el cuantificador universal.

Definición 4.7 (Imagen de una clase por una correspondencia).
Sea $\Gamma = \langle G, A, B\rangle$ y$X \subseteq A$. Se llama la *imagen de* X *por* Γ, notada $\Gamma(X)$, a la clase de los elementos de B cuyas primeras coordenadas son elementos de A:

$$\Gamma(X) = \{y \mid \exists x(\langle x, y\rangle \in G \wedge x \in X)\}$$

4.1.4 Operaciones entre correspondencias

Introducamos ahora algunas operaciones importantes entre correspondencias:

Definición 4.8 (Gráfica y correspondencia inversas).
La *gráfica inversa* de una correspondencia Γ, denotada G^{-1} es la gráfica obtenida intercambiando las primeras y segundas coordenadas de G:

$$G^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in G\}$$

y la *correspondencia inversa* de $\Gamma = \langle G, A, B\rangle$ es:

$$\Gamma^{-1} = \left\langle G^{-1}, B, A\right\rangle$$

Ejercicio 4.2 (Uso de teléfonos).
Hallar la gráfica y la correspondencia inversa del ejemplo 4.1.

Ejercicio 4.3 (Imagen inversa).
Definir la imagen de un conjunto por Γ^{-1}

Ejercicio 4.4 (Inversa de la inversa).
¿Cuál es la correspondencia inversa de Γ? ¿Por qué?

Otra operación importante es la *composición de correspondencias*. Comenzaremos definiedo la composición de gráficas:

Definición 4.9 (Composición de gráficas).
Se llama la *composición* de G_1 y G_2 a la gráfica $G_3 = G_2 \circ G_1$, formada por los pares $\langle x, z\rangle$ tales que hay algún y para el cual $\langle x, y\rangle$ pertenece a G_1 y $\langle y, z\rangle$ a G_2:

$$G_2 \circ G_1 = \{\langle x, z\rangle \mid (\exists y)[\langle x, y\rangle \in G_1 \wedge \langle y, z\rangle \in G_2]\}$$

Definición 4.10 (Composición de correspondencias).
La composición $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$ de las correspondencias $\Gamma_i = \langle G_i, A_i, B_i\rangle$ es:

$$\Gamma_2 \circ \Gamma_1 = \langle G_2 \circ G_1, A_1, B_2\rangle$$

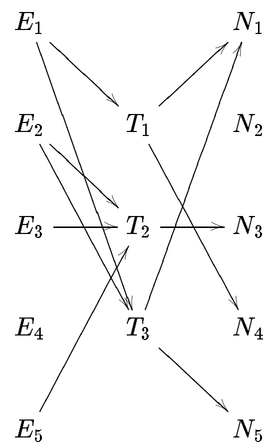


Figura 4.3: Ejemplo de relación: Uso de teléfonos para hablar con la novia

Ejemplo 4.3 (Uso de teléfonos).
Sea $N = \langle N_1 \dots N_5 \rangle$ las novias respectivas de los empleados E, y sea G_2 la relación $\ulcorner T_i$ conecta con $N_j \urcorner$. La relación $\ulcorner E_i$ puede hablar con $N_j \urcorner$ es la composición de las dos relaciones (Figura 4.3).

La composición de correspondencias (y la de gráficas) tienen la *propiedad asociativa*:

Teorema 4.2 (Asociatividad de la composición).

$$(\Gamma_3 \circ \Gamma_2) \circ \Gamma_1 = \Gamma_3 \circ (\Gamma_2 \circ \Gamma_1)$$

Además, vale:

Teorema 4.3 (Regla del inverso).

$$(\Gamma_2 \circ \Gamma_1)^{-1} = \Gamma_1^{-1} \circ \Gamma_2^{-1}$$

Intuitivamente, la regla del inverso es clara: si para vestirse se debe poner primero la camisa y luego el pulóver, para desvestirse se debe sacar el pulóver antes que la camisa.

4.2 Funciones

No todas las correspondencias tienen el mismo valor para la investigación científica o filosófica. Algunos tipos especiales de correspondencia son particularmente fecundos; Entre ellos, las *correspondencias funcionales* o *funciones*. Son indispensables en las ciencias formales (Matemática y lógica), juegan un papel sistematizador esencial en todas las demás y forman el corazón de la filosofía exacta. Haremos en lo que sigue un resumen de los principales resultados en la teoría de las funciones.

4.2.1 Correspondencias funcionales

Un ejemplo de correspondencia funcional es la que existe entre una vivienda y su dirección: el cartero no necestia una descripción detallada del edificio para encontrarla; basta con dar su dirección pues existe una única vivienda con una dirección dada. Esta particularidad, que la primera coordenada determina en forma única la segunda, es lo que caracteriza las correspondencias funcionales.

Para definir funciones, comenzaremos por definir:

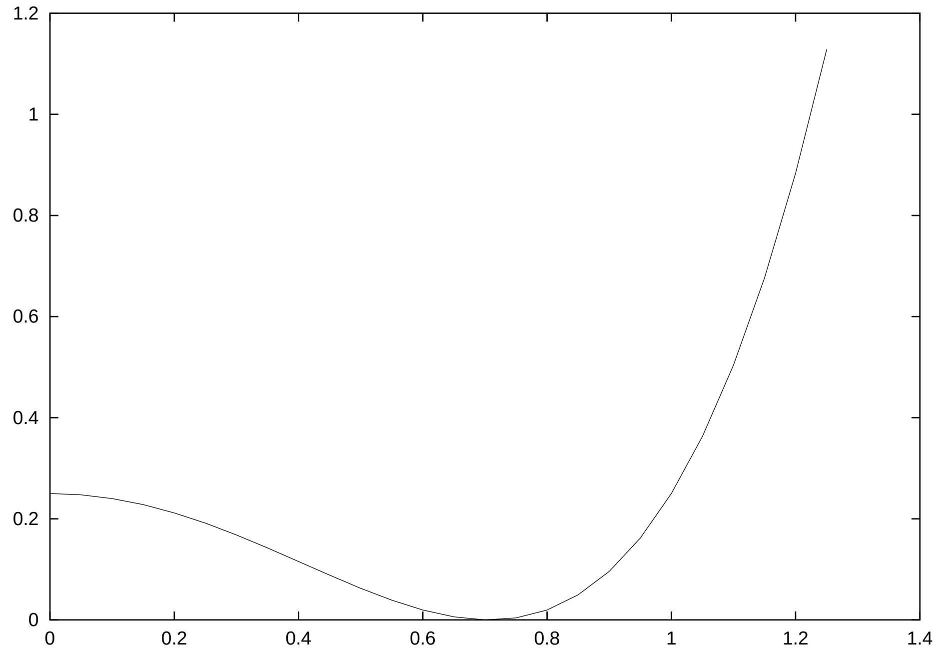


Figura 4.4: Ejemplo de gráfica funcional

Definición 4.11 (Relación y gráfica funcional).
Una relación $\doteqdot$ se llama *funcional* si para cada x existe un único y (Sec. 3.1) tal que $x \doteqdot y$. La gráfica correspondiente se llama una *gráfica funcional*.

La representación cartesiana de una gráfica funcional tiene, para cada abcisa, una única ordenada, como el ejemplo de la figura 4.4.

Definición 4.12 (Función (Aplicación)).
Una correspondencia

$$f = \langle F, A, B \rangle \tag{4.2}$$

es una *función* (o *aplicación*) si:

1. Su conjunto de partida es igual a su dominio: $A = \mathrm{pr}_1 F$.
2. F es una gráfica funcional.

Dada su ubicuidad, hay una elaborada (y a veces inconsistente) notación para funciones. Se dice que (4.2) es una función de A en B y se abrevia:

$$f : A \to B \tag{4.3}$$

o también, en forma ligeramente distinta:

$$A \xrightarrow{f} B \tag{4.4}$$

Si $\langle x, y \rangle \in F$, se llama a y el *valor de la función en* x y se lo designa como $y = f(x)$ (notación funcional) o como $y = f_x$ (notación de índice). Por otra parte A se llama el *dominio* de la función y B el *codominio* o el *rango* de la función. Emplearemos con frecuencia un abuso de lenguaje muy común en ciencia: se confunde la función (4.3) con su valor en un punto $f(x)$; es decir, se habla de "la función $f(x)$".

Los ejemplos del uso de funciones en ciencias son innumerables. Examinemos unos pocos:

Ejemplo 4.4 (Posición de un móvil).
La posición de un móvil es una función del tiempo $x(t)$. ¡Un móvil no puede estar en dos lugares a la vez!

Ejemplo 4.5 (Propiedades características).
La densidad, punto de fusión e índice de refracción de una sustancia, en condiciones normales de presión y temperatura, son funciones de la composición química.

Ejemplo 4.6 (Herencia biológica).
El color de ojos de una persona (fenotipo) es una función de la estructura genética heredada (genotipo).

Ciertos tipos particulares de función son importantes.

Definición 4.13 (Inyección).
Una función $f : A \to B$ se llama *inyectiva* (o también *biunívoca*) si diferentes elementos de A producen diferentes elementos de B:

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Ejemplo 4.7 (Matrimonio).
Sea H_C la clase de casados y M la de las mujeres. La función $e = \langle \ulcorner\text{esposa de}\urcorner, H_C, M\rangle$ es una inyección (en los países monógamos).

Definición 4.14 (Suryección (Epiyección)).
Una función $f : A \to B$ se llama *suryectiva* (o también *epiyectiva* o áun *sobreyectiva*) si todo elemento de $y \in B$ tiene un elemento correpondiente tal que $y = f(x)$.

Ejemplo 4.8 (Madre hay una sola).
La función $m = \langle \ulcorner\text{madre de}\urcorner, H, M\rangle$ es una suryección[1].

Definición 4.15 (Biyección).
Una función es biyectiva si es a la vez inyectiva y suryectiva.

Ejemplo 4.9 (Documento de identidad).
El número de documento de identidad[2] es una biyección sobre el conjunto de las personas físicas.

Estos tipos de función son especialmente importantes, pero aclaremos que muchas de las funciones que utilizan en ciencia o en la vida cotidiana no pertenecen a ninguno de estos tipos.

4.2.2 Operaciones sobre funciones

Las operaciones de inversa y composición de correspondencias se extienden inmediatamente a las funciones. La composición de dos funciones es siempre una función. Sin embargo, la correspondencia inversa de una función no es, necesariamente, una relación funcional. Pero en el caso particular de las biyecciones esto se cumple:

Teorema 4.4.
La condición necesaria y suficiente para que la inversa de la función $f : A \to B$ sea otra función es que f sea biyectiva.

[1] Si se incluye a la donante de óvulos para bebés de probeta.
[2] Si se excluyen los documentos "mellizos".

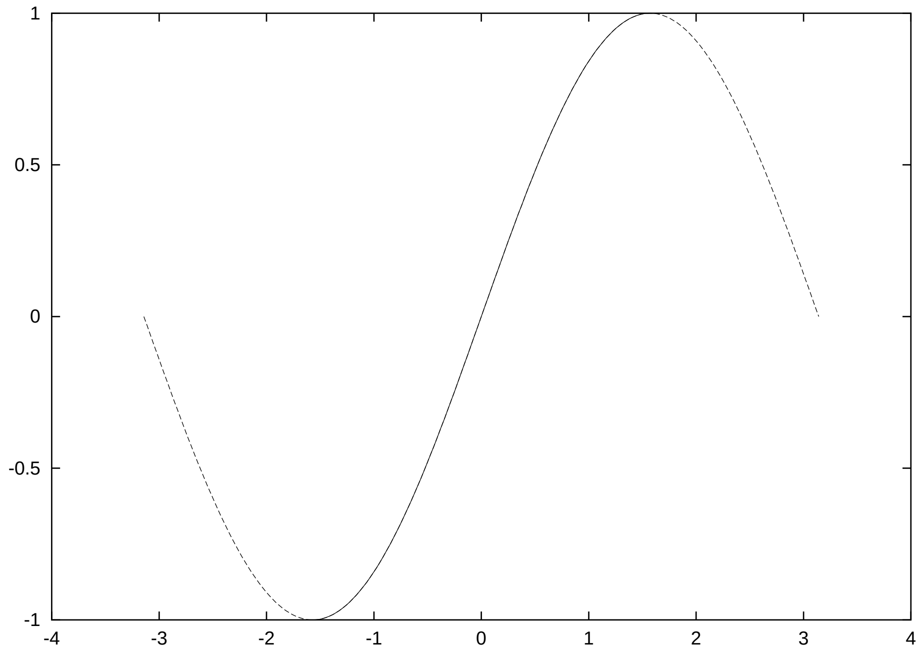


Figura 4.5: Restricción del dominio del seno

Definición 4.16 (Función inversa).
Si f es biyectiva, se llama *función inversa* f^{-1} a la corresponencia inversa de f.

Ejercicio 4.5 (Inversa de función compuesta).
Mostrar que la inversa de una función compuesta satisface la "Regla del inverso" (Teorema 4.3)

Existe una notación gráfica muy intuitiva para expresar la composición de funciones, que generaliza la notación (4.3). Así, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

expresa gráficamente que $h = g \circ f$. Usaremos, ocasionalmente, estos *diagramas conmutativos.*

Aunque no todas las funciones son inyectivas, es posible hacerlo con muchas de ellas "achicando" su dominio.

Ejemplo 4.10 (Restricción de dominio del seno).
La función seno no es inyectiva sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$, pero sí lo es sobre el intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. (Figura 4.5).

Definimos, pues:

Definición 4.17 (Restricción de funciones).
Sea $f : A \to B$, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq f(X)$. Si $F = \{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in X\}$, entonces la *restricción de f a X* es la función $f \mid X, Y = \langle F, X, Y\rangle$. Cuando el conjunto Y no interesa, se usa la notación más simple $f \mid X$.

Eligiendo convenientemente los conjuntos X, Y es posible obtener biyecciones a partir de muchas funciones.

Ejercicio 4.6 (Construcción de biyecciones).
Restringiendo convenientemente las funciones, hallar biyecciones para:

1. $y = 2x(1-x)$
2. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$
3. La función *salario docente.*

La operación inversa, la *prolongación* de una función, se define de una forma análoga:

Definición 4.18 (Prolongación de funciones).
Si $f = g \mid X$, entonces $g = \langle G, A, B\rangle$ es una *prolongación* de g.

Ejercicio 4.7 (Prolongación del salario docente (?)).
De un ejemplo de prolongación de la función *salario docente.*
Sugerencia: Considere el conjunto $A' = \{\text{docentes}\} \cup \{\text{ñoquis}\}$

4.2.3 Familias de conjuntos

Cuando se utiliza la notación de índice para funciones, se usa también una nomenclatura particular. Sea $f = \langle F, A, B\rangle$ una función con valores f_x. Llamaremos a la gráfica F una *familia*, al conjunto de partida *conjunto de índices* (y se utiliza la letra I en lugar de A) y utilizaremos la notación $F = (x_i)_{i\in A}(x_i \in B)$. Cuando el rango B es el conjunto de las partes de una clase, $B = \mathcal{P}C$, se habla de una *familia de conjuntos.*

Ejemplo 4.11 (Personal docente).
El personal docente en una universidad se agrupa en categorías (Profesor titular, asociado, etc.) que forman una familia de conjuntos con $I = \{I \in \mathbb{N} \mid 1 \le i \le 6\}$.

Ejemplo 4.12 (Oraciones bien formadas).
Las oraciones bien formadas de un lenguaje (Sec. 1.5) son una familia sobre el conjunto de las partes del alfabeto terminal V_T.

Las operaciones de unión e intersección se generalizan a una familia de conjuntos:

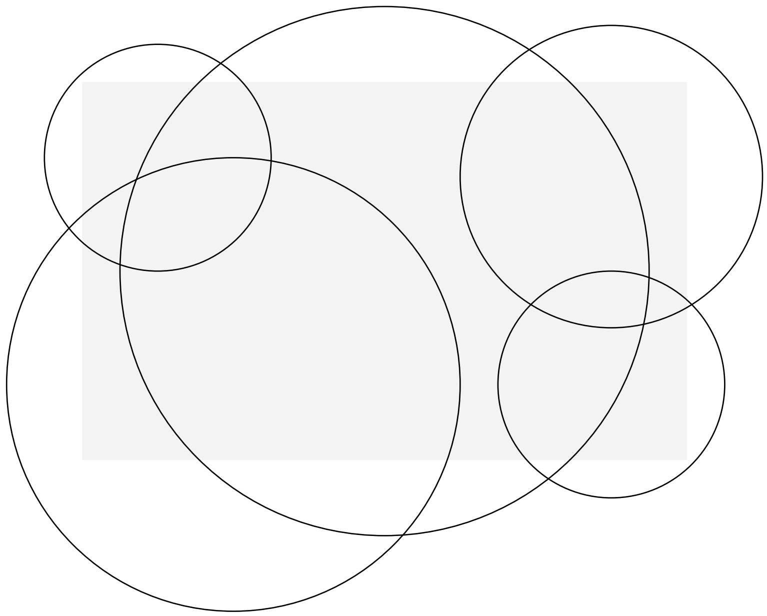
Definición 4.19 (Unión de una familia de conjuntos).
La unión de una familia de conjuntos $\bigcup_{i\in I} X_i$ es la clase unión (Def. 3.8) de los conjuntos de la familia.

y vale una definición análoga para la intersección. También es válido el importante teorema:

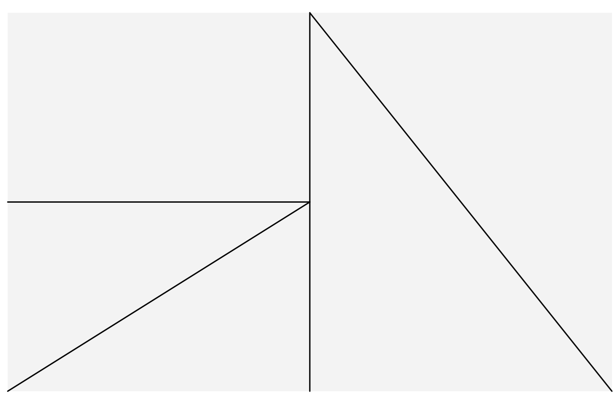
Teorema 4.5 (Relaciones de de Morgan para familias).
Sea $\mathcal{F}$ una familia de partes de una clase E. Valen, entonces, las relaciones de de Morgan*:*

$$\complement_E \bigcup_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I} \complement_E X_i$$
$$\complement_E \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} \complement_E X_i$$

cuya demostración se deja como ejercicio.
Introduzcamos ahora un par de familias de conjuntos importantes.



(a) Cubrimiento



(b) Partición

Figura 4.6: Ejemplos de cubrimiento y partición

Definición 4.20 (Recubrimiento).
Una familia de conjuntos $(X_i)_{i\in I}$ es un *recubrimiento* del conjunto E si $E \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i$. Se dice, además que el recubrimento $(Y_k)_{k\in K}$ es más fino que que el primero, si $(\forall k)_K(\exists i)_I(Y_k \subseteq X_i)$.

Ejemplo 4.13 (Personal docente).
Las categorías docentes (Profesor titular, etc) forman un cubrimiento del plantel docente.

Ejemplo 4.14 (Atlas).
Las distintas páginas de un atlas forman un cubrimiento del mapa del territorio estudiado.

Más importante que un cubrimiento es una *partición* de un conjunto. En un cubrimiento hay "zonas grises": elementos de E que pertenecen a dos o más X_i (Fig. 4.6). Para clasificar objetos en ciencias (o para deslidar responsabilidades en la vida cotidiana) es necesario que no existan esas zonas grises. Esto puede lograrse si los X_i son *disjuntos dos a dos:*

$$\forall(i,j)_I(X_i \cap X_j = \varnothing \tag{4.6}$$

Definición 4.21 (Partición de un conjunto).
Una *partición* de un conjunto E es una familia $X_i \subset E$ de subconjuntos de E que satisfacen:

1. $\forall i(X_i \neq \varnothing)$
2. $\forall(i,j)(X_i \cap X_j = \varnothing)$
3. $\bigcup_i X_i = E$

Una partición, pues, divide un conjunto en subconjuntos disjuntos; intuitivamente, los elementos de cada uno de estos subconjuntos comparten una propiedad.

4.2.4 Funciones de dos (o más) variables

Con las definiciones que hemos dado es fácil caracterizar funciones de dos o más variables.

Definición 4.22 (Funciones de dos variables).
Una función una función del producto cartesiano de cos conjuntos X, Y en C, $f : X \times Y \to C$ se llama *función de dos variables.*

La notación usual es $w = f(x,y)$ pero hay casos particulares tan importantes que se adopta para muchas funciones de dos variables la *notación de infijo.*

Ejemplo 4.15 (Ecuación de estado).
La ecuación de estado de un gas describe la presión p como una función muy complicada del volumen V y la temperatura T.

$$f : V \times T \to p$$

Ejemplo 4.16 (Suma).
La suma de dos números reales es una función $+ : \Re \times \Re \to \Re$. Esta función es tan importante que desde tiempo inmemorial se usa para ella la notación infijo $z = x+y$ para sus valores.

Ejemplo 4.17 (Operaciones lógicas).
Las operaciones lógicas son funciones de $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ (Sec. 2.3).

Ejemplo 4.18 (Predicados).
Un predicado n-ario P es una función:

$$P : \prod_{i=1}^{n} \Omega_i \to \{\texttt{FBF}\}$$

que a cada conjunto de objetos $\{x_1 \ldots x_n\}$ le asigna una oración $P(x_1, \ldots x_n)$. Además, el mismo predicado define una función:

$$P_V : \prod_{i=1}^{n} \Omega_i \to \mathcal{V}$$

que asigna un valor de verdad a la oración $P(x_1, \ldots x_n)$. Ambas funciones deben distinguirse cuidadosamente aunque, por una tradición secular, se use la misma notación para ambas.

4.3 Equivalencia

En esta sección y la siguiente introduciremos varios conceptos matemáticos de gran importancia en la filosofía exacta: las nociones de equivalencia y orden sobre conjuntos. En ambos casos, se trata de relaciones cuyos conjuntos de partida y llegada coinciden. Diremos que son *relaciones binarias sobre un conjunto*.

4.3.1 Relaciones sobre conjuntos

Definición 4.23 (Relación sobre un conjunto).
Una relación binaria (Sec. 2.2.1) $\ulcorner \Bumpeq \urcorner$ está[3] definida sobre un subconjunto $D \subset \Omega$ del universo de discurso si

$$\ulcorner \Bumpeq \urcorner = \langle G, D, D \rangle \tag{4.7}$$

Así, pues, una relación sobre un conjunto D establece propiedades mutuas entre los elementos de D. Estas relaciones tienen propiedades particulares, que las hacen muy valiosas.

Definición 4.24 (Propiedades de relaciones binarias).
Diremos que $\ulcorner \Bumpeq \urcorner$ tiene una de las propiedades siguientes, si y sólo si:

Reflexividad: $\forall(x \in D)(x \Bumpeq x)$

Simetría: $\forall(x \in D)\forall(y \in D)(x \Bumpeq y \Rightarrow y \Bumpeq x)$

Antisimetría: $\forall(x \in D)\forall(y \in D)(x \Bumpeq y \wedge y \Bumpeq x \Rightarrow x = y)$

Transitividad: $\forall(x \in D)\forall(y \in D)\forall(z \in D)(x \Bumpeq y \wedge y \Bumpeq z \Rightarrow x \Bumpeq z)$

Por ejemplo, la relación de perpendicularidad es simétrica, aunque no es reflexiva ni transitiva; y la relación ⌜confiar⌝ es reflexiva pero no simétrica ni transitiva:

> *... en el mayor infortunio*
> *pongan su confianza en Dios;*
> *de los hombres, sólo en uno,*
> *con gran precaución, en dos.*

Por otra parte, una relación puede tener más de una de las propiedades anteriores, tal como la relación ⌜hermano de⌝, que es simétrica y transitiva.

[3] Correctamente, habría que decir "$\ulcorner \Bumpeq \urcorner$ *designa* una relación binaria". Por abuso de lenguaje, diremos habitualmente "$\ulcorner \Bumpeq \urcorner$ *es* una relación binaria".

4.3.2 Relaciones de equivalencia

Hemos visto que la igualdad tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva sobre cualquier clase (Sec. 3.1). Las *relaciones de equivalencia* formalizan la noción de similaridad entre objetos del mismo conjunto.

Definición 4.25 (Relación de equivalencia).
Una *relación de equivalencia* $\equiv$ sobre D es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

Las relaciones de equivalencia abundan en la ciencia:

Ejemplo 4.19 (Parentesco).
Si se conviene en que uno es pariente de sí mismo, la relación de parentesco es de equivalencia sobre el conjunto de miembros de una sociedad.

Ejemplo 4.20 (Paralelismo).
Si se conviene que toda recta es paralela a sí misma, la relación de paralelismo es de equivalencia sobre el conjunto de rectas del plano.

Ejemplo 4.21 (Indistinguibilidad).
Dos cuantones[4] son *indistinguibles* si sus propiedades intrínsecas (masa, carga, spin ...) son iguales. La relación de indistinguibilidad (en mecánica cuántica) es de equivalencia.

Ejemplo 4.22 (Composición química).
Dos compuestos químicos son *equicompuestos* si tienen la misma fórmula estructural.

Ejemplo 4.23 (Igualdad).
La igualdad es una relación de equivalencia sobre cualquier conjunto D.

Las relaciones de equivalencia son importantes porque permiten definir nuevos constructos por el procedimiento de *abstracción*. Para hacerlo. mostraremos ahora el

Teorema 4.6 (Equivalencia y particiones).
Una relación de equivalencia $\equiv$ define una partición sobre D y viceversa, una partición de D define una relación de equivalencia.

Demostración. Los elementos equivalentes a x forman un subconjunto de D, llamado la *clase de equivalencia* de x:

$$R(x) = \{y \in D | x \equiv y\} \tag{4.8}$$

Es fácil ver que $R(x) \cap R(y)$ es vacío o es $R(x)$. En efecto:

$$z \in [R(x) \cap R(y)] \Rightarrow (z \equiv x) \wedge (z \equiv y)$$

y por lo tanto

$$R(x) \cap R(y) \neq \varnothing \Rightarrow R(x) = R(y)$$

Por otra parte, si $\{A_i\}$ es una partición de D, podemos definir una relación de equivalencia:

$$(x \equiv y) \Leftrightarrow \exists i (x \in A_i \wedge y \in A_i)$$

□

[4]Por abuso de lenguaje, en lugar de cuantones suele decirse partículas

Así, pues, una relación de equivalencia formaliza la noción de *propiedad común entre los elementos de un conjunto.*

Definición 4.26 (Conjunto cociente).
Se llama el *conjunto cociente* de D por $\equiv$ al conjunto de las clases de equivalencia:

$$(D/\equiv) = \{R(x)|x \in D\}$$

Intuitivamente, el conjunto cociente representa el conjunto de las propiedades compartidas por los elementos de D. Puesto que todos los elmentos de una clase de equivalencia comparten la propiedad en cuestión, uno cualquiera de ellos puede tomarse como el representante de la clase:

$$r = \tau x R(x) \tag{4.9}$$

En el lenguaje cotidiano, esta capacidad de cualquier elemento para ser representante de su clase de equivalencia, se expresa con la locución "Para muestra, basta un botón".

Ejemplo 4.24 (Familias).
En una sociedad, las familias son las clases de equivalencia de la relación de parentesco.

Ejemplo 4.25 (Dirección).
Las clases de equivalencia de la relación de paralelismo representan la dirección de una recta en el plano.

Ejemplo 4.26 (Partículas elementales).
Las clases de equivalencia de la relación de indistinguibilidad formalizan la noción de *tipo (o especie) de partícula elemental*: electrones, fotones, quarks ...

Ejemplo 4.27 (Equicomposición).
Las clases de equivalencia de la relación de equicomposición formalizan la noción de *especie química.*

Ejemplo 4.28 (Proposiciones).
Las clases de equivalencia de la relación de sinonimia entre oraciones formaliza la noción de *proposición.*

Aclaremos, ahora, la noción de definición por abstracción:

Definición 4.27 (Definiciones por abstracción).
Las clases de equivalencia $R(x)$ o su representante (4.9) *definen por abstracción* un nuevo concepto. El concepto está representado por estos constructos.

4.4 Orden

La noción de orden juega un papel central en la ciencia y, hasta cierto punto, la ha originado. Así, la clasificación de especies biológicas, el análisis gramatical del lenguaje y la sistematización de datos observacionales son intentos de comprender la existencia de una estructura de orden en la naturaleza.

4.4.1 Conjuntos ordenados

Definiremos ahora la noción de orden sobre un conjunto D.

Definición 4.28 (Relaciones de orden parcial).
Diremos que $\preceq$ es una *relación de orden parcial* sobre el conjunto D si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

$$
\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
 & G_1 \arrow[dl] \arrow[d] & G_2 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & G_3 \arrow[d] \arrow[dr] & \\
S_1 \arrow[dr] & S_2 \arrow[d] \arrow[dr] & S_3 \arrow[d] \arrow[dr] & S_4 \arrow[d] & S_5 \arrow[dl] \\
 & E_1 \arrow[dr] & E_2 \arrow[d] & E_3 \arrow[dl] & \\
 & & C_h & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.7: Una empresa como conjunto ordenado. La relación de orden es la jerarquía. P: Presidente; G_i: gerentes; S_i: secretarias; E_i: empleados; Ch: el "Chepibe".

La expresión $a \preceq b$ se lee *x es menor (inferior) a y* o *x precede a y*. La relación inversa $a \succeq b \Leftrightarrow b \preceq a$ también es una relación de orden, que se llama el *orden inverso* y se lee *a es mayor que b*, etc.

Definición 4.29 (Conjunto ordenado).
Se llama *conjunto ordenado* al par $\langle D, \preceq \rangle$, en donde D es un conjunto y $\preceq$ es una *relación de orden parcial* sobre D.

Ejemplo 4.29 (Inclusión).
La relación de inclusión $\subset$ es una relación de orden sobre $\mathcal{P}(D)$.

Ejemplo 4.30 (Descendencia).
La relación $\ulcorner a$ desciende de $b \urcorner$ es de orden sobre el conjunto de especies biológicas.

Ejemplo 4.31 (Jerarquía).
La relación $\ulcorner x$ es jefe de $y \urcorner$ es de orden sobre el personal de una institución.

Ejemplo 4.32 (Una empresa como conjunto ordenado).
La figura 4.7 muestra la estructura jerárquica de una empresa como ejemplo de un conjunto ordenado: el presidente P dispone de un conjunto de gerentes $\{G_i\}$ que comparten un conjunto de secretarias $\{S_i\}$. A su vez, éstas dirigen notas y memorandos a un conjunto de empleados $\{E_i\}$ quienes delegan todo el trabajo en el "Chepibe" Ch. El carácter de orden parcial en la empresa se ve claramente, pues un gerente no puede imponer su jerarquía a otro gerente: la relación de jerarquía no está definida entre ambos.

Definición 4.30 (Orden total).
Se dice que un conjunto está *totalmente ordenado* si y sólo si para cada par de elementos a, b vale $a \preceq b$ o $b \preceq a$.

Un conjunto totalmente ordenado se llama también una *cadena*.

Ejemplo 4.33 (Magnitud).
La relación $\leq$ entre números es de orden total.

Ejemplo 4.34 (Cadena de órdenes).
En la empresa de la figura 4.7 el subconjunto:

$$P \succeq G_1 \succeq S_2 \succeq E_2 \succeq Ch \tag{4.10}$$

es una cadena. El lenguaje cotidiano ha registrado este tipo de subconjuntos como una "cadena de mandos": el presidente pide un paquete de cigarrillos, la orden se transmite a lo largo de la "cadena de mando" y el "Chepibe" termina haciendo la compra.

4.4.2 Elementos distinguidos

Las relaciones de orden permiten distinguir elementos interesantes en conjuntos ordenados. En primer lugar, introduzcamos una generalización de las nociones elementales de máximo y mínimo:

Definición 4.31 (Elementos maximales y minimales).
Sea $\langle D, \preceq \rangle$ un conjunto ordenado. Se llama *elemento maximal (minimal)* a un $a \in D$ tal que

$$x \succeq a \Rightarrow x = a$$

$$(x \preceq a \Rightarrow x = a)$$

También los llamaremos *máximo (mínimo)* del conjunto.

Ejemplo 4.35 (Conjunto de las partes).
Si $\mathcal{P}(E)$ es el conjunto de las partes de E, ordenado por la relación de inclusión $\subset$, E es el elemento maximal y $\varnothing$ el elemento minimal. Si $Q = \mathcal{P}(E) - \varnothing$, entonces todos los conjuntos unitarios son elementos minimales.

Ejemplo 4.36 (Empresa).
En el modelo de empresa, (Ej. 4.32) P es el elemento maximal y Ch el minimal.

Ejercicio 4.8.
Hallar los elementos maximales y minimales en el conjunto de taxones biológicos, ordenados por inclusión.

La definición que sigue, generaliza otra noción importante en análisis:

Definición 4.32.
Sea $\langle D, \preceq \rangle$ un conjunto ordenado y $X \subset D$. Un elemento $a \in D$ es una *cota superior (inferior)* de X si

$$x \in X \Rightarrow x \preceq a$$

$$(x \in X \Rightarrow x \succeq a)$$

También los llamaremos, a veces, *elementos mayorantes (minorantes)* de X.

Obviamente, si a es cota superior de X, $a' \succeq a$ también lo es. Advirtamos, sin embargo, que un conjunto puede no tener cotas inferiores o superiores.

Ejemplo 4.37 (Clasificación taxonómica).
En la clasificación taxonómica, el conjunto de clases de vertebrados tiene mayorante (el conjunto de vertebrados) pero no minorante.

Ejemplo 4.38 (Empresa).
En el ejemplo 4.32, el conjunto de las secretarias tiene como mayorante al presidente y como minorante al "Chepibe".

Finalmente, introduciremos otra noción importante:

Definición 4.33 (Supremos e ínfimos).
Sea D un conjunto ordenado y $X \subset D$. Se llama *supremo (ínfimo)* de X al mínimo (máximo) de los mayorantes (minorantes).

El supremo de un conjunto $X \subset D$, si existe, se designa con la notación $a = \sup_D X$.

Ejemplo 4.39 (Empresa).
El supremo de nuestra empresa modelo es el Presidente y el ínfimo el "Chepibe"[5]. Por otra parte, el gerente G_2 es el supremo del conjunto de secretarias $\{S_2, S_3, S_4\}$, mientras que el ínfimo es el "Chepibe".

Ejemplo 4.40 (Intervalos racionales).
Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales y

$$X = \{x \in \mathbb{Q} | 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$$

Entonces: $\inf_{\mathbb{Q}} X = 0$, pero $\sup_{\mathbb{Q}} X$ no existe.

4.4.3 El lema de Zorn

El siguiente teorema tiene una gran importancia para demostrar la existencia de ciertos elementos maximales.

Teorema 4.7 (Lema de Zorn).
Si en un conjunto ordenado $Z = \langle A, \preceq \rangle$ toda cadena tiene cota superior, existe un elemento maximal de Z.

Demostración. La demostración puede verse en las referencias [100, 45] $\square$

El lema de Zorn es equivalente al Principio de Elección (Teor. 3.17) y consecuencia de los axiomas de la teoría de conjuntos (Sec. 3.4) en la teoría expuesta en este texto.

4.5 Estructuras

Por ahora, hemos tratado a clases, conjuntos y relaciones como objetos aproximadamente independientes, que pueden superponerse en forma más o menos arbitraria. Si bien esto es cierto, existen combinaciones de clases y correspondencias especialmente importantes, sea porque son fértiles en la investigación matemática, sea porque se utilizan con frecuencia para representar propiedades de objetos naturales. Estas combinaciones expresan la estructura de un conjunto; de su existencia depende, fundamentalmente, la importancia de la teoría de conjuntos en matemáticas y en filosofía. Introduciremos, entonces, otra noción fundamental en la teoría: la noción de *estructura*[6].

Definición 4.34 (Estructura).
Se llama *estructura* a un conjunto $E = \langle C, R \rangle$ en donde

[5] ¿Qué otra cosa podía esperarse?
[6] Por una vez, el nombre está bien elegido.

1. C es un conjunto (que puede ser una nupla ordenada),
2. R es una familia de relaciones sobre C.

Diremos que el conjunto C tiene una *estructura* R.

Ejemplo 4.41 (Orden).
Un conjunto ordenado $\langle D, \preceq \rangle$ es una estructura.

Ejemplo 4.42 (Grupo).
Una conjunto G tiene una *estructura de grupo* si R es una función $\otimes : G \times G \to G$ tal que para $a, b, c \in G$ cualesquiera:

Asociativa: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$

Modular: $\exists(e)_G[e \otimes a = a \otimes e = a$

Invertible: $\forall(a)_G \exists(a^{-1})_G[a \otimes a^{-1} = a^{-1} \otimes a = e]$

Ejercicio 4.9 (Monoide).
Defina la estructura de monoide.

Ejercicio 4.10 (Cociente).
Explique un conjunto cociente como estructura.

Diferentes estructuras jugarán un papel muy importante en el desarrollo de la teoría. En realidad, toda teoría científica es una estructura, de tipo muy especial, sobre un conjunto de proposiciones.

Parte II

Semántica

Capítulo 5

Teorías

Hasta ahora, nuestro tratamiento del lenguaje de la lógica ha sido puramente formal: definimos su sintaxis, las nociones de demostración y teorema, y lan nociones metalógicas de regla de prueba y metateorema. En esta sección nos proponemos comenzar el análisis del significado de las oraciones de la lógica.

La noción de teoría es central en la filosofía exacta de la ciencia: tanto nuestro conocimiento del mundo exterior como el de la matemática está estructurado en teorías. El objetivo de ste capítulo es elucidar esta noción y otras conexas.

Una teoría es un sistema de proposiciones ordenadas a través de la relación de consecuencia '$\vdash$'. La estructura resultante, al mismo tiempo flexible y sólida, es la herramienta fundamental para indagar la estrucutra de la naturaleza. Es fácil ver por qué: las proposiciones interesantes de una teoría están interconectadas de manera tal que la falsedad de una de ellas implica el abandono de la teoría. Cada teoría representa, pues, una visión parcial pero coherente del mundo. Por supuesto, esto no ocurre con proposiciones aisladas: la falsedad de una hipótesis aislada no trae consecuencias sobre una cosmovisión.

5.1 Reticulados

Todo el análisis semántico de una teoría se basa en un sistema pequeño de nociones matemáticas: la de un ideal (o un filtro) sobre un reticulado. Estas nociones combinan estructuras de orden, algebraicas y topológicas para formar una armoniosa teoría matemática.

5.1.1 Definición y propiedades

Una clase particular de conjuntos ordenados tiene una gran importancia:

Definición 5.1 (Reticulado).
Se llama *reticulado (lattice)* a un conjunto ordenado $\langle \mathbb{L}, \succeq \rangle$, en el que cualquier par de elementos $\{a, b\}$ tiene un supremo y un ínfimo:

$$\sup\{a, b\} = a \curlyvee b \tag{5.1}$$

$$\inf\{a, b\} = a \curlywedge b \tag{5.2}$$

En lugar de reticulado, usaremos a veces retículo, red o *lattice*.

Ejemplo 5.1 (Empresa).
Nuestro modelo de empresa (Ej. 4.32) es un reticulado.

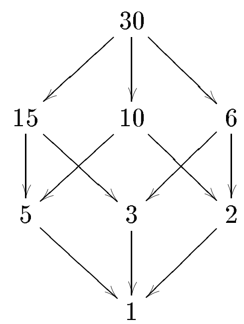


Figura 5.1: Reticulado de los divisores de 30

Ejemplo 5.2 (Divisores).
El conjunto de los divisores de un número es un reticulado, con el mínimo común múltiplo como $\curlyvee$ y el máximo común divisor como $\curlywedge$.

Ejemplo 5.3 (Árboles).
Los árboles son conjuntos ordenados (por la relación de inclusión) que *no* son reticulados: cada par de elementos tiene un supremo pero no tiene un ínfimo.

Se puede representar gráficamente un reticulado en una forma similar a un conjunto ordenado. Por ejemplo, el conjunto de los divisores del número 30 tiene la representación gráfica de la figura 5.1

Los reticulados tienen muchas propiedades agradables, que los hacen muy útiles en muchas ramas de la ciencia y la filosofía exacta [8, 94, 45].

Teorema 5.1 (Propiedades generales).
En todo reticulado $\mathbb{L}$ son válidas las siguientes propiedades:

Idempotencia: $a \curlyvee a = a$
$a \curlywedge a = a$

Conmutatividad: $a \curlyvee b = b \curlyvee a$
$a \curlywedge b = b \curlywedge a$

Asociatividad: $(a \curlyvee b) \curlyvee c = a \curlyvee (b \curlyvee c)$
$(a \curlyvee b) \curlyvee c = a \curlyvee (b \curlyvee c)$

Absorción: $a \curlywedge (a \curlyvee b) = a \curlyvee (a \curlywedge b) = a$

Otra propiedad muy importante es el

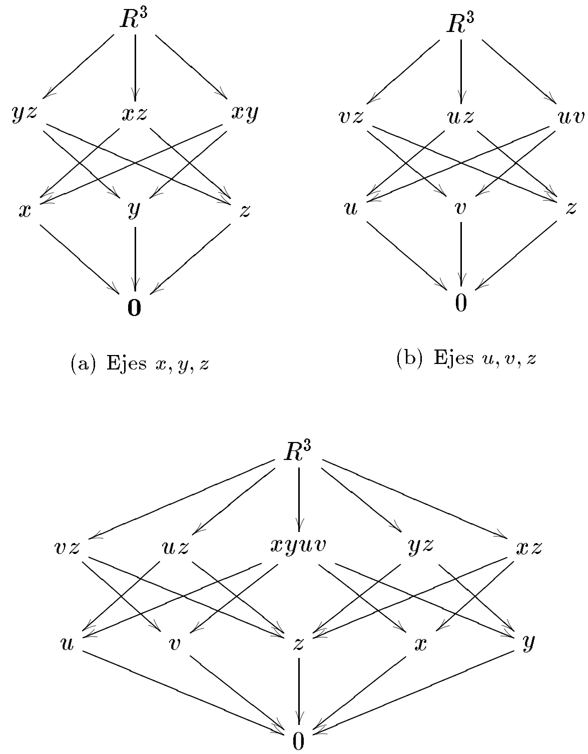
Teorema 5.2 (Principio de conformidad).
En todo reticulado $\mathbb{L}$:

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \curlyvee b = b \Leftrightarrow a \curlywedge b = a$$

Ejercicio 5.1 (Empresa).
Verificar la validez de las leyes anteriores en el modelo de empresa del ejemplo 4.32.

5.1.2 Distributividad

Las leyes generales 5.1 son análogas a las que valen para la suma y la multiplicación. En cambio, en un reticulado no es en general válida la ley distributiva.



(a) Ejes x, y, z

(b) Ejes u, v, z

(c) Ambos juegos de ejes

Figura 5.2: Reticulados correspondientes a subespacios vectoriales de R^3

Definición 5.2 (Reticulados distributivos).
Un reticulado se llama *distributivo* si valen las *leyes distributivas*:

$$
\begin{aligned}
a \curlywedge (b \curlyvee c) &= (a \curlywedge b) \curlyvee (a \curlywedge c) \\
a \curlyvee (b \curlywedge c) &= (a \curlyvee b) \curlywedge (a \curlyvee c)
\end{aligned}
$$

En caso contrario, el reticulado se llama *no distributivo*.

Los reticulados distributivos son importantes en lógica, pues veremos que una teoría científica puede definirse como una parte de un reticulado distributivo. Sin embargo, los reticulados no distributivos juegan un papel muy importante en distintas ramas de la ciencia.

Ejemplo 5.4 (Subespacios vectoriales del espacio tridimensional).
Los subespacios vectoriales de R^3, el espacio euclídeo de 3 dimensiones, provee de ejemplos de reticulados distributivos y no distributivos. Formamos estos reticulados interpretando $x \curlyvee y$ como el plano xy (el subespacio generado por ambas rectas) y $x \curlywedge y$ como el subespacio generado por la intersección de los mismos (en este caso, el origen), La figura 5.2 muestra los correspondientes reticulados. Los dos primeros (formados por dos juegos de ejes de coordenadas y los planos correspondientes) son distributivos. El tercero no lo es: $u \curlywedge (x \curlyvee y) = u$, pues el eje u yace en el plano xy mientras que $(u \curlywedge x) \curlywedge (u \curlywedge y) = 0$ pues las rectas u, x e y se cortan en el origen.

El siguiente teorema caracteriza a los reticulados no distributivos:

$$\begin{tikzcd}
 & q \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
u \arrow[d] & & v \arrow[ddl] \\
x \arrow[dr] & & \\
 & y &
\end{tikzcd}$$

(a) M_5

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
a \arrow[dr] & b \arrow[d] & c \arrow[dl] \\
 & y &
\end{tikzcd}$$

(b) M_3

Figura 5.3: Los subretículos N_5 y M_3

Teorema 5.3 ("Teorema $N_5 - M_3$").
Un reticulado es no distributivo si y sólo si contiene un subretículo con las estructuras M_3 o N_5 (Fig. 5.3).

La demostración puede verse en la referencia [45].

5.1.3 Álgebras booleanas

Los reticulados más importantes, desde nuestro punto de vista, son las álgebras de Boole: un tipo de reticulado que aparece, no solamente en la lógica (donde se los introdujo por primera vez) sino también en ontología, epistemología y otros problemas filosóficos. Para definirlos, necesitamos introducir previamente otras nociones importantes.

Se llaman *cotas universales* (si existen) a dos elementos $\mathbb{I}$ y $\mathbb{O}$ tales que:

$$\forall(x \in \mathbb{L})(\mathbb{O} \preceq x \preceq \mathbb{I}) \tag{5.3}$$

En la teoría de retículos, el complemento de un elemento se designa con una prima: $\complement a = a'$.

Teorema 5.4 (Complementos en reticulados distributivos).
En un reticulado distributivo $\mathbb{L}$, el complemento de un elemento (si existe) es único y satisface la leyes:

Involución: $(a')' = a$

Dualismo: $(a \curlyvee b)' = a' \curlywedge b'$
$(a \curlywedge b)' = a' \curlyvee b'$

Complementación: $a \curlywedge a' = \mathbb{O}$
$a \curlyvee a' = \mathbb{I}$

Ejercicio 5.2 (Empresa).
¿Cuáles son las cotas universales de la empresa modelo?

Ejemplo 5.5 (Conjunto de las partes).
Las cotas universales de $\mathcal{P}(E)$ son E y $\varnothing$.

A veces, es posible completar un conjunto ordenado y transformarlo en un retículo añadiendo una cota universal apropiada. Por ejemplo, un árbol puede transformarse en un retículo si se añade un elemento ficticio '$\perp$' tal que para cualquier par de hojas a y b, $a \curlywedge b = \perp$.

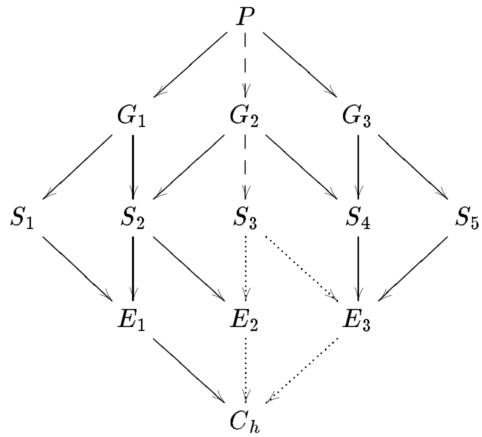


Figura 5.4: Ideales y filtros en el modelo de empresa: los elemetos unidos por flechas rayadas indican el ideal de la secretaria $S3$, mientras que las puntedas indican el correspondiente filtro

Definición 5.3 (Álgebra de Boole).
Un *álgebra de Boole* es un reticulado distributivo, con cotas universales.

Como veremos, las álgebras de Boole juegan un papel muy importante en la estrucutra de teorías.

5.1.4 Ideales y filtros

Definición 5.4 (Subretículo).
Un *subreticulado* $\mathbb{S}$ del reticulado $\mathbb{L}$ es es un subconjunto de $\mathbb{L}$, que es también un reticulado con respecto de las operaciones $\curlyvee$ y $\curlywedge$.

Por ejemplo, cualquier elemento de un reticulado es un subreticulado. M_3 es un subretículo del lattice de subespacios vectoriales de R^3.

Dos subreticulados particulares son importantes en el análisis de teorías científicas [94, 82, 45].

Definición 5.5 (Ideales y filtros de un retículo).
Un *ideal* sobre un retículo $\mathbb{L}$ es un subconjunto no vacío $\mathbb{J}$ de $\mathbb{L}$, tal que

1. $a \in \mathbb{J} \wedge x \preceq a \Rightarrow x \in \mathbb{J}$
2. $a \in \mathbb{J} \wedge b \in \mathbb{J} \Rightarrow a \curlyvee b \in \mathbb{J}$

Un *filtro* sobre $\mathbb{L}$ es un ideal correspondiente al orden opuesto $\succeq$.

Un caso particular importante de ideal sobre un retículo es

Definición 5.6 (Ideales y filtros principales).
El subconjunto $\mathbb{J}(a) = a \curlywedge \mathbb{L}$ es el conjunto de todos los elementos que preceden a a:

$$\mathbb{J}(a) = \{x | x \preceq a\}$$

Los ideales de esta forma se llaman *ideales principales*. El conjunto dual se llama *filtro principal*.

Ejemplo 5.6 (Ideal y filtro en el modelo de empresa).
La figura 5.4 muestra el ideal y el filtro de la secretaria $S3$: recibe órdenes de los miembros del ideal (Presidente y gerente $G2$) y las da a los del filtro.

Entre los ideales (filtros) de un reticulado, existen algunos que son particularmente interesantes. Los *ideales (filtros) maximales* cubren completamente el reticulado. Con más precisión:

Teorema 5.5 (Ideales y filtros maximales).
Sean $\mathbb{J}$ un ideal y $\mathbb{K}$ un filtro, disjuntos sobre $\mathbb{L}$. Entonces, existen un ideal $\mathbb{J}' \supset \mathbb{J}$ y $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$ tales que $\mathbb{L} = \mathbb{J}' \cup \mathbb{K}'$.

El ideal $\mathbb{J}'$ se llama un ideal maximal *sobre $\mathbb{L}$ y $\mathbb{K}'$, un* filtro maximal.

5.2 Contextos y teorías

La noción de teoría científica juega, en la filosofía que estamos exponiendo, un papel fundamental. Analizaremos, por lo tanto, su estructura formal para después estudiar su significado.

5.2.1 Contextos

Las propiedades formales de una teoría son especialmente claras si ésta se estudia como caso particular de sistemas de proposiciones más generales. Comencemos, pues, por estudiar estos sistemas de proposiciones:

Definición 5.7 (Contexto).
Dado un lenguaje conceptual $\mathcal{L}$ llamaremos un *contexto* $\mathbb{C}$ a la terna $\langle S, \mathbb{P}, D\rangle$, donde:

D es una parte de Ω;

$\mathbb{P}$ es un conjunto de predicados P, tales que $\mathcal{R}(P) \subset D \subset \Omega$; y

S es un conjunto de enunciados de $\mathcal{L}$, donde sólo aparecen predicados $P \in \mathbb{P}$.

En el capítulo 6 examinaremos con precisión la noción de clase (o conjunto) de referencia $\mathcal{R}$. Informalmente, es el dominio común de los predicados de $\mathbb{P}$.

Sea ahora $\mathbb{C}_0 = \langle S_0, \mathbb{P}_0, D\rangle$ un contexto dado. El conjunto de enunciados S_0 no tiene, en general, una estructura definida y lo mismo ocurre con $\mathbb{P}_0$. Podemos, sin embargo, estructurarlo si añadimos todas las proposiciones (enunciados o funciones proposicionales) que pueden formarse a partir de S_0 aplicando todas las operaciones lógicas entre los elementos que los componen. Pero además, será conveniente otro paso: identificar las proposiciones lógicamente equivalentes. En efecto, si P y Q son dos enunciados arbitrarios, la relación $P \Leftrightarrow Q$ es de equivalencia sobre S_0. Definiremos pues S como el conjunto completado S' dividido por '$\Leftrightarrow$'. El conjunto S es ahora *cerrado*: si P y Q son dos enunciados arbitrarios, $\neg P$, $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $\forall x P$, etc, pertenecen también a S. El nuevo contexto $\mathbb{C} = \langle S, \mathbb{P}, D\rangle$ se llama un *contexto cerrado*.

Definición 5.8 (Contexto cerrado).
Se llama *contexto cerrado* a una estructura

$$\mathbb{C} = \langle S, \mathbb{P}, D\rangle$$

en donde

1. $\mathbb{C}$ es un contexto

2. S es cerrado respecto de las operaciones lógicas, incluyendo cuantificación.

Ahora bien, el conjunto de todas las proposiciones $p \in S$ forman un álgebra de Boole. En efecto, el conjunto S está ordenado por la relación de deducción $\vdash$. Ésta es una relación de orden parcial, donde todas las consecuencias de los axiomas, sus negaciones, etc., *y de otras teorías auxiliares* están ordenadas por $\vdash$; más precisamente, definimos $P \preceq Q \stackrel{\text{def}}{=} Q \vdash P$. Sobre este conjunto ordenado, las operaciones $\wedge, \vee, \neg$ satisfacen las mismas propiedades formales que las $\curlywedge, \curlyvee, '$, y por lo tanto S es un reticulado distributivo y complementado con respecto de las operaciones lógicas. También existen dos cotas universales: toda tautología la identificaremos con $\mathbb{O}$ y toda contradicción con $\mathbb{I}$. De esta manera, puede demostrarse el:

Teorema 5.6.
El conjunto de proposiciones S, ordenado por $\vdash$ es un álgebra de Boole con $\vee, \wedge, \neg$ como operaciones.

Un resultado análogo vale para los predicados. Definamos:

Definición 5.9 (Operaciones sobre predicados).

$$(\neg P)(x) = \neg P(x)$$
$$(P \wedge Q)(x) = P(x) \wedge Q(x)$$
$$(P \vee Q)(x) = P(x) \vee Q(x)$$

Con estas definiciones es fácil demostrar:

Teorema 5.7 (Álgebra booleana de predicados).
El conjunto de todos los predicados definidos sobre un subdominio común $E \subset D$ es un álgebra de Boole.

5.2.2 Tenor y discurrencia

Examinemos ahora el conjunto de proposiciones asociadas a un constructo dado en un contexto cerrado $\mathbb{C}$. Lo característico de un contexto es que las proposiciones que contiene no están aisladas: cualquiera de ellas está conectada con otros constructos por las reglas de la lógica.

Sea entonces un constructo x contenido en un contexto cerrado $\mathbb{C}$. Comencemos por definir:

Definición 5.10 (Tenor).
El *tenor* de un constructo x es el ideal maximal generado por x (es decir, el conjunto de las proposiciones de las que se deduce x):

$$\mathbb{J}(x) = \{y \mid y \vdash x\} \tag{5.4}$$

Definición 5.11 (Discurrencia).
La *discurrencia* de un constructo x es el filtro maximal generado por x (es decir, el conjunto de proposiciones consecuencia de x):

$$\mathbb{F}(x) = \{y \mid x \vdash y\} \tag{5.5}$$

Las dos definiciones anteriores son, por supuesto, duales entre sí. Veamos un ejemplo importante.

Ejemplo 5.7 (Ley de la gravitación universal de Newton).
Examinemos algunos de los elementos del tenor y de la discurrencia de la ley de la gravitación universal de Newton [20][1]. Esquematizaremos su formalización de la siguiente manera:

[1]Nos limitamos a los asectos *sintácticos* de la teoría. El análisis *semántico* lo esbozaremos a lo largo del curso.

Axioma 5.1 (Ley de poisson).

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G_N \rho \tag{5.6}$$

Definición 5.12 (Densidad de un punto masa).

$$\rho(\mathbf{r}) = m\delta(\mathbf{r})$$

Definición 5.13 (Fuerza).

$$\mathbf{F} = -m' \nabla \phi$$

Teorema 5.8 (Potencial de un punto masa).

$$\phi = G_N \frac{m}{r}$$

Teorema 5.9 (Ley de gravitación universal).

$$\mathbf{F} = G_N m m' \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Teorema 5.10 (Ley de acción y reacción).

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

Teorema 5.11 (Aditividad de fuerzas).
Las fuerzas producidas por dos o más puntos masa son aditivas.

Teorema 5.12 (Fuerza en el interior de una cáscara esférica).
La fuerza newtoniana en el interior de una cáscara esférica se anula.

Teorema 5.13 (Atracción de una esfera).
Una esfera atrae un punto masa como si toda su masa estuviera concentrada en el centro.

El tenor de la ley de Newton (Teorema 5.9) es el conjunto:

$$\{\text{Ax. } 5.1, \text{Defs. } 5.12 \text{ y } 5.13, \text{Teos. } 5.8 \text{ y } 5.9\} \tag{5.7}$$

Y su discurrencia es:

$$\{\text{Teos. } 5.9,\ 5.10,\ 5.11,\ 5.12,\ 5.13\ldots\} \tag{5.8}$$

Advirtamos, sin embargo, que no hemos caracterizado completamente la teoría: para hacerlo, tendríamos que enunciar un número considerablemente mayor de axiomas

5.3 Teorías

Estamos ahora en condiciones de describir rigurosamente una teoría científica. En el capítulo 2 definimos provisoriamente una teoría como el conjunto de proposiciones que se deducen a partir de los axiomas. También caracterizamos (provisoriamente) a las constantes de la teoría como el conjunto de letras que aparece en los axiomas. Vamos a refinar estas definiciones utilizando la noción de contexto.

5.3.1 Bases de una teoría

Sea, entonces, un contexto cerrado $\mathbb{C} = \langle S, \mathbb{P}, D \rangle$.

Definición 5.14 (Base axiomática).
Sea $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \{A_i\}$ una parte de S, que llamaremos *el conjunto de los axiomas de la teoría*. Este conjunto puede ser finito o infinito, pero en este último caso deben existir, necesariamente, uno o más esquemas de axioma. Se llama la *base axiomática* $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ de una teoría $\mathcal{T}$ a la conjunción de los axiomas:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i$$

Por otra parte, los axiomas de la teoría atribuyen determinadas relaciones a objetos del universo de discurso Ω (cf. Sección 2.2.1). Estos objetos se denotan con letras u otros símbolos tomados del alfabeto terminal del lenguaje conceptual con el que trabajamos, que no son otra cosa que las constantes de la teoría (Precisaremos las nociones designación y denotación en el capítulo 6).

Definición 5.15 (Base primitiva (o conceptual)).
Se llama *base primitiva* $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ de una teoría al conjunto de conceptos denotados por las constantes de la teoría.

Ahora podemos dar una definición rigurosa de teoría.

Definición 5.16 (Teoría formalizada).
Una *teoría formalizada* en un contexto $\mathbb{C}$ es la discurrencia (el filtro maximal, conjunto de las proposiciones que se deducen) de la base axiomática:

$$\mathcal{T} = \{x \mid \mathcal{B}_{\mathcal{A}} \vdash x\} \tag{5.9}$$

Una teoría científica no está aislada: cualquier teoría (excepto la lógica) presupone proposiciones tomados de otras teorías. Por ejemplo, la teoría de grupos presupone la teoría de conjuntos y la mecánica clásica alguna teoría del espacio y del tiempo. El contexto cerrado $\mathbb{C}$ contiene, pues, no sólo proposiciones de la teoría $\mathcal{T}$ sino también proposiciones tomadas de un *acervo previo* de presupuestos $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$.

Esto sugiere la siguiente defińción:

Definición 5.17 (Aspecto Principal de una teoría).
Sea $\mathcal{B}_{\mathcal{P}} \subset S$ el acervo previo de una teoría con base axiomática $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$. Se llama el *aspecto principal* de la teoría al tenor de $\mathcal{T}$.

Es bastante evidente que el aspecto principal de $\mathcal{T}$ es $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{P}}$. El aspecto principal de una teoría, pues, resume el conjunto de todos los supuestos con que se ha construido. Por otra parte, estos supuestos son de varios tipos: las proposiciones puramente lógicas (o tautologías) L; las proposiciones pertenecientes al acervo previo y la base axiomática. Podemos clasificar las proposiciones de esta última en tres grandes grupos:

Axiomas formales o matemáticos: Enuncian propiedades formales de los conceptos de la teoría.

Axiomas semánticos: Establecen reglas de denotación o hipótesis de representación para los símbolos.

Axiomas factuales: Enuncian leyes o atribuyen propiedades a los objetos de la teoría.

Desde este punto de vista, los teoremas de la teoría son los elementos de la discurrencia, la base axiomática es la intersección de la discurrencia y el aspecto principal. Compárese esto con un punto de vista sicológico, que considera a los axiomas como "proposiciones evidentes" y a los teoremas como "proposiciones no evidentes".

En una teoría formalizada, las definiciones juegan el papel de abreviaturas: son eliminables(al menos, en principio), en el sentido de que, en cualquier punto de la teoría, puede reemplazarse el ente definido por el definiente.

5.3.2 Comparación de teorías

Desde el punto de vista de la ciencia y la filosofía, es muy importante la capacidad de comparar dos teorías científicas. Preguntas como

- ¿Es la óptica un caso particular de la teoría electromagnética?
- ¿Es la mecánica ondulatoria más general que la mecánica de matrices?
- ¿Cuál es la conexión entre la química (considerada como un conjunto de teorías) y la física?

son comunes e importantes en la investigación científica cotidiana y en el análisis filosófico de la ciencia.

Examinaremos un criterio de comparación de teorías. En particular, interesa formalizar la noción de generalidad. Esto puede lograrse de la siguiente manera:

Definición 5.18 (Fuerza de una teoría).
Una teoría $\mathcal{T}'$ es *más fuerte* que otra teoría $\mathcal{T}$ si

1. Los símbolos de $\mathcal{T}$ son símbolos de $\mathcal{T}'$
2. Los axiomas de $\mathcal{T}$ son teoremas de $\mathcal{T}'$
3. Los esquemas de $\mathcal{T}$ son esquemas de $\mathcal{T}'$

La relación de fuerza lógica es de orden parcial entre el conjunto de teorías. Ésta conduce a una caracterización muy simple de la fuerza cuando las dos teorías están definidas sobre el mismo contexto cerrado:

Teorema 5.14 (Caracterización de fuerza relativa).
Una teoría $\mathcal{T}'$, definida sobre un contexto cerrado $\mathbb{C}$ es más fuerte que otra $\mathcal{T}$ sobre el mismo contexto, si la segunda es un subfiltro de la primera.

Ahora podemos definir:

Definición 5.19 (Generalidad).
Una teoría $\mathcal{T}$ es más general que $\mathcal{T}'$ si es *menos fuerte*.

Ejemplo 5.8 (Electromagnetismo y óptica).
La teoría electromagnética es más general que la óptica.

Finalmente, definimos la noción:

Definición 5.20 (Isostenia de teorías).
Dos teorías definidas sobre el mismo contexto cerrado $\mathbb{C}$ son *isosténicas* si cada una es más fuerte que la otra.

Por lo tanto, dos teorías isosténicas tienen los mismos teoremas aunque, por lo general, en distinto orden. La isostenia es una relación de equivalencia, importante en la filosofía de la ciencia: dos teorías isosténicas describen los mismos fenómenos naturales aunque (como veremos) tienen significados diferentes.

Ejemplo 5.9 (Formulaciones de la mecánica cuántica).
La mecánica ondulatoria y la de matrices son isosténicas.

Observemos que la comparación de teorías es posible si ambas están formalizadas; con más precisión, si tienen explícita su estructura axiomática. La comparación de teorías *retóricas* (es decir, no formalizadas) conduce a resultados ambiguos.

5.3.3 Propiedades de teorías

Una teoría es un sistema de proposiciones ligadas por la relación de consecuencia '$\vdash$' y por lo tanto debe satisfacer ciertos criterios de razonabilidad. El primero y más importante es el de consistencia.

Definición 5.21 (Consistencia).
Una teoría $\mathcal{T}$ es *inconsistente* si se puede demostrar una contradicción: $\vdash P \wedge \neg P$. En caso contrario, la teoría se llama *consistente*.

Una teoría inconsistente es inútil desde el punto de vista científico pues en ella toda proposición es un teorema

Teorema 5.15.
Una contradicción implica toda proposición.

Ejercicio 5.3.
Probar el teorema 5.15.

Ejemplo 5.10 (Hegelianismo).
El *hegelianismo* (la filosofía de Hegel) incorpora las "contradicciones" como una parte de la "logica hegeliana". Las contradicciones entre una "tesis" y una "antítesis" se resuelven en una "síntesis". Pero, del teorema 5.15, deducimos que en el hegelianismo se pueden probar todas las propsiciones, incluyendo

$$\ulcorner \text{El hegelianismo es falso} \urcorner$$

Una teoría consistente tiene una caracterización muy simple en un contexto cerrado: el filtro generado por los axiomas no contiene el supremo $\mathbb{I}$. Se trata, pues, de un *filtro propio* y, por tratarse de un filtro maximal, sea un elemento, sea su complemento pertenecen a $\mathcal{T}$: la teoría consistente es un *ultrafiltro*.

Otra condición importante es la de *completitud*.

Definición 5.22 (Completitud).
Una teoría se llama *completa* si añadir a los axiomas cualquier proposición que *no es* un teorema la hace inconsistente.

Teorema 5.16 (Caracterización de completitud).
En una teoría completa, toda proposición $\boldsymbol{P}$ o su negación es un teorema.

Intuitivamente, en una teoría completa toda proposición *verdadera* es demostrable. En realidad, las cosas no son tan fáciles: la noción de completitud *sintáctica* 5.22 es más fuerte (menos general) que la noción semántica, que hemos enunciado informalmente.

La noción de completitud que acabamos de introducir es excesivamente fuerte para aplicarla a las ciencias naturales. En éstas, nuestro conocimiento está limitado por razones obvias: el mundo real es mucho más rico que cualquier universo de discurso Ω, y este último. a su vez, es mucho más rico que cualquier conjunto de datos o de hechos *observados*. Las definiciones que siguen son suficientes para las aplicaciones de la lógica a las ciencias fácticas:

Definición 5.23 (p-Completitud).
Una teoría factual $\mathcal{T}$ es *p-completa* si su base axiomática es suficiente para caracterizar la base primitiva correspondiente.

Por *caracterización* de un concepto, entendemos la atribución de sus principales propiedades.

Definición 5.24 (d-Completutud).
Una teoría factual $\mathcal{T}$ es *d-completa* si los principales resultados (por ejemplo, proposiciones factuales contrastables con el experimento) se pueden probar a partir de los axiomas.

5.3.4 Un ejemplo de teoría

Vamos a dar un ejemplo sencillo de teoría sobre un contexto cerrado $\mathbb{C}_0$ ([103], §1-8). Se tratará de una *teoría abstracta*: no hay, por el momento, ningún mapa de interpretación. Veremos, en capítulos sucesivos, cómo puede enriquecerse este sencillo modelo para "aproximarlo a la realidad".

El contexto $\mathbb{C}_0 = \langle S, \mathbb{P}_0, D \rangle$ está especificado por las siguientes ecuaciones:

$$\mathbb{P}_0 = \{D_t(r, P, Q)\} \tag{5.10}$$

$$D = \{P_1, P_2, P_3, r_{12}, r_{23}, r_{31}\} \tag{5.11}$$

Es decir, nuestro contexto contiene un único predicado (símbolo) D_t y nuestro universo de discurso contiene seis elementos. S, en cambio, es un conjunto muy grande: está determinado por todas las proposiciones deducibles de los axiomas (y sus conjunciones, negaciones, etc.). Convendremos en que D_t se lee "P y Q determinan un r".

Enunciaremos ahora el conjunto de axiomas de la teoría.

Axioma 5.2.
Dos P determinan un r único:

$$\forall_D P \forall_D Q \exists_D ! r D_t(r, P, Q)$$

Axioma 5.3.
Cada r está determinado por (al menos) dos P distintos.

$$\forall_D r \exists_D (P, Q) D_t(r, P, Q)$$

Definición 5.25.
P pertenece a r (o r pasa por p) si hay algún Q que junto con P determina a r.

$$P \in r \Leftrightarrow \exists_D Q(D_t(r, P, Q) \vee D_t(r, Q, P))$$

Axioma 5.4.
Por cada P pasan dos r distintos.

$$\forall_D P \exists_D (r, s)(P \in r \wedge P \in s \wedge r \neq s)$$

Los axiomas anteriores caracterizan los P y los r. Examinemos algunos teoremas sencillos que pueden deducirse de los axiomas:

Teorema 5.17.
Existen (por lo menos) tres P distintos.

Teorema 5.18.
Existen (por lo menos) tres r distintos.

Ejercicio 5.4.
Demostrar los teoremas 5.17 y 5.18.

Capítulo 6

Modelos

La ciencia, formal o factual, trabaja construyendo *modelos* de los fenómenos que estudia. Esto ya había sido observado por el gran físico teórico Ludwig Boltzmann (citado en [118]):

> Los modelos tienen gran importancia en las ciencias matemáticas, físicas y mecánicas. Hace tiempo ya, la filosofía percibió que la esencia de nuestro proceso de pensamiento yace en el hecho de que ligamos a los varios objetos que nos rodean, atributos físicos particulares —nuestros conceptos— y por medio de ellos tratamos de representar estos conceptos en nuestras mentes.

Este proceso de modelización, esencial en la interpretación de teorías factuales, procede por varias etapas que examinaremos en este capítulo.

6.1 La noción de modelo

Comenzaremos por estudiar la interpretación de una teoría $\mathcal{T}$ definida sobre un contexto $\mathbb{C}$. Aunque nuestro interés principal es el estudio de teorías factuales, comenzaremos por teorías abstractas para después estudiar modelos factuales.

6.1.1 Modelos

Dada una teoría $\mathcal{T}$, sobre un contexto $\mathbb{C}$, consideremos la subteoría (teoría más débil) $\mathcal{T}'$ derivada del subconjunto de los axiomas formales $\{A_i^F$. Esta teoría se llama *abstracta*, pues no utiliza ninguno de los axiomas semánticos.

Consideremos ahora otra teoría $\mathcal{M}$, que construiremos de la siguiente manera: en la nueva teoría, conservaremos todos los predicados (y por lo tanto, la *forma* de las proposiciones primitivas) de $\mathcal{T}$ pero cada una de sus constantes la reemplazaremos por un término nuevo $t_i = \mu(c_i)$. A través de esta función μ, cada proposición de $S_{\mathcal{T}}[c_i] \in \mathcal{T}$, se transforma en una proposición de $\mathcal{M}$ que menciona a los términos t_i en donde se mencionaban las constantes c_i. Diremos que $\mathcal{M}$ es un *modelo sintáctico* de $\mathcal{T}$. Teoría y modelo, pues, difieren sólo en la base primitiva. Más formalmente:

Definición 6.1 (Modelo sintáctico).
Sea $\mathcal{T}$ una teoría, $\{c_i\}$ el conjunto de sus constantes y $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ su base axiomática. Sea $\mathcal{M}$ otra teoría, $\{t_i\}$ un conjunto de términos y $\mathcal{B}'_{\mathcal{A}}$ su base axiomática. Si las teorías tienen los mismos símbolos, los mismos esquemas y existe una función $\mu : \mathcal{T} \to \mathcal{M}$ tal que para cada proposición S:

$$\begin{aligned} t_i &= \mu(c_i) \\ S_{\mathcal{M}}[t_i] &= \mu(S_{\mathcal{T}}[c_i]) \end{aligned}$$

$\oplus$	I	R	R'
I	I	R	R'
R	R	R'	I
R'	R'	I	R

Tabla 6.1: Tabla de multiplicación de C_3

entonces, $\mathcal{M}$ es un *modelo* de $\mathcal{T}$.

Definición 6.2 (Interpretación formal).
Diremos que el par ordenado $\langle \mathcal{M}, \mu \rangle$ es una *interpretación formal* de la teoría $\mathcal{T}$.

Mucho más interesante es el caso en que la función μ transforma símbolos en conjuntos: en ese caso estamos en presencia de un *interpretación semántica*. Hemos visto, en el capítulo 3 que todo predicado $P(x)$ puede reemplazarse por la clase de los elementos que lo satisfacen P. Podemos usar esta transformación para construir un modelo semántico. Para ello, reemplazaremos las constantes c_i por elementos del universo de discurso $a_i \in \Omega$; en particular, cada uno de los predicados $P \in \mathbb{P}$ por una correspondencia sobre el producto cartesiano de partes del universo de discurso (Cf. Cap. 4). De este modo, todas las `FBF`'s de la teoría pueden interpretarse como relaciones sobre el universo de discurso o su conjunto de las partes. Con más precisión:

Definición 6.3 (Modelo e interpretación semánticos).
Sea $\mathcal{T}$ una teoría definica sobre un contexto $\mathbb{C} = \langle S, \mathbb{P}, \Omega \rangle$ y sea $\mathcal{M}$ un modelo formal de $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{M}$ es una teoría de conjuntos y μ transforma las constantes de $\mathcal{T}$ en elementos de Ω y los predicados de $\mathbb{P}$ en correspondencias sobre $\mathcal{P}\,\Omega$, entonces diremos que $\mathcal{M}$ es un *modelo semántico* de $\mathcal{T}$ y que el par ordenado $\langle \mathcal{M}, \mu \rangle$ es una *interpretación semántica* de $\mathcal{T}$.

Desde ahora en adelante, trabajaremos únicamente con modelos semánticos.

6.1.2 Ejemplos

Ejemplo 6.1 (Un ejemplo sencillo).
Una interpretación de la teoría abstracta sencilla desarrollada en la sección 5.3.4, se obtiene con la función:

$$\begin{aligned} \{A, B, C\} &= \mu(\{P_1, P_2, P_3\}) \\ \{a, b, c\} &= \mu(\{r_{23}, r_{31}, r_{12}\}) \end{aligned}$$

que asocia a los P los vértices de un triángulo y a los r los lados opuestos. El modelo de la teoría abstracta describe un triángulo geométrico.

Ejemplo 6.2 (Rotaciones de un triángulo equilátero).
Un ejemplo más interesante es la interpretación del grupo cíclico de tres elementos, C_3 como grupo de rotaciones del triángulo equilátero. El grupo C_3 contiene tres elementos $\{I, R, R'\}$, y la ley de multiplicación $\oplus$ está definida por la tabla 6.1.

Construiremos nuestra interpretación en dos etapas.

1. La función μ_1 asocia a cada elemento del grupo una permutación de un conjunto de tres elementos $\{A, B, C\}$:

$$I = (A, B, C); \quad R = (B, C, A); \quad R' = (C, A, B)$$

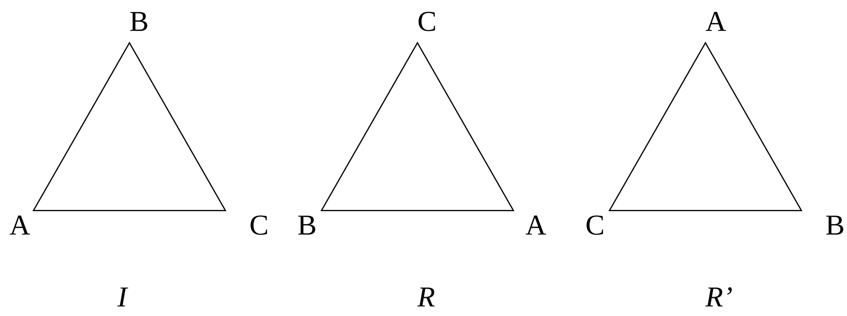


Figura 6.1: Rotaciones de un triángulo equlátero

2. La función μ_2 asocia el conjunto de tres elementos $\{A, B, C\}$ a los vértices del triángulo $\triangle ABC$.

3. La función de representación final es:

$$\mu = \mu_2 \circ \mu_1$$

   y se representa en la figura 6.1: a cada elemento del grupo le corresponde una rotación del triángulo que lo deja invariante.

6.1.3 Modelos, lenguaje y metalenguaje

Como lo habrá advertido el lector atento, un modelo $\mathcal{M}$ de una teoría formulada en un lenguaje objeto $\mathcal{L}_0$ pertenece al metalenguaje (a algún metalenguaje) $\mathcal{L}_{k>0}$. La función μ transforma elementos del lenguaje objeto (las constantes, en este caso) en elementos del metalenguaje. Por ejemplo, en el caso de una interpretación semántica, los conjuntos y correspondencias que se usan en el modelo pertenecen al metalenguaje. La interpretación de la teoría se reduce, por lo tanto, a establecer una correspondencia entre ambos lenguajes.

6.2 Nombres

Uno de los dichos más comunes en la conversación cotidiana es *"Para comprenderse, hay que ponerse de acuerdo sobre el significado de las palabras"*. Esto es más fácil decirlo que hacerlo, pues en la ciencia las palabras toman significados diferentes de los habituales. Por ejemplo, en matemáticas *anillo* y *grupo* tienen significados muy distintos de los que les atribuimos en la vida cotidiana.

La manera de atribuir un significado a un término es establecer un diccionario: una función que conecte cada término con su significado. Esto puede hacerse de dos maneras: en la *concepción mágica del lenguaje* se supone que los nombres de los objetos están conectados en forma no trivial con los mismos [11]:

> *Si (como el griego afirma en el Cratilo)*
> *El nombre es arquetipo de la cosa,*
> *En las letras de* rosa *está la rosa*
> *Y todo el Nilo en la palabra* Nilo.

Esto no ocurre habitualmente en la ciencia, aunque hay excepciones. En el excelente libro "Electrodinámica" de Sommerfeld [132] se lee:

> Vemos que, con unidades racionalizadas, el factor 4π aparece para la esfera, donde pertenece; con unidades convencionales flata para la esfera y aparece para el condensador plano, adonde no pertenece.

Este texto está redactado de tal modo que parece restringir al factor 4π a las ecuaciones que surgen en un contexto de simetría esférica. Con el mismo criterio, se debería "racionalizar" el teorema de Cauchy (al menos cuando los contornos de integración sean rectángulos) o la ecuación de difusión (donde el factor $\sqrt{2\pi}$ aparece por normalización). En todos estos casos, el factor aludido puede eliminarse de la ecuación con la que uno desea trabajar, a costa de hacerlo aparecer en otro lado.

La asignación de nombres en la ciencia (así como sistemas de unidades, etc.) se hace por convención, en forma arbitraria aunque consistente y una filosofía exacta de la misma debe adherirse a esta concepción. En este sentido, la ciencia toma la actitud shakespeareana hacia los nombres [129]:

> *What's in a name? That which we call a rose*
> *by any other name would smell as sweet.*

La asignación de significado a los términos (casi exclusivamente a las constantes de una teoría) se complica en el caso de teorías factuales por la necesidad de distinguir entre *objetos ideales* (es decir, constructos) y *objetos reales* (o *cosas*) en Ω.

Esta distinción es importante: las teorías científicas utilizan los constructos para describir las cosas que son su objeto de estudio. Así pues, un electrón libre se representará con una determinada representación irreducible de grupo de Poincaré $\langle p^\mu, m_e\rangle$; un gas real con su ecuación de estado $p = f(V,T)$ (o con la función termodinámica fundamental $U = U(S,V)$) y una especie biológica con el conjunto de atributos del ejemplar tipo. Por otra parte, los constructos se representan a través de otros constructos: funciones, conjuntos, etc., con los que se los construye. En este último caso, el objetivo de un nombre es abreviar una exposición, mientras que en el primer caso se trata de individualizar un objeto del mundo real. Necesitamos, pues, dos funciones: una para dar nombres a constructos y otra para dar nombre (a través de un constructo, por supuesto) a un objeto real.

Definición 6.4 (Designación).
Sea $\mathcal{N} = \{\boldsymbol{x}\}$ el conjunto de los términos de una teoría $\mathcal{T}$ y C el conjunto de constructos. La *función de designación*:

$$\mathcal{D} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}(C)$$

asocia un nombre (término) a conjuntos de constructos.

Definición 6.5 (Denotación).
Sea $\mathcal{N} = \{\boldsymbol{x}\}$ el conjunto de los términos de una teoría $\mathcal{T}$ y $D \subset \Omega$ el universo de discurso de la teoría. La *función de denotación*:

$$\mathbb{D} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}(\Omega)$$

asocia un nombre (término) a conjuntos de objetos.

Estas dos definiciones describen rigurosamente la noción de nombre. La forma exacta de estas funciones no está especificada y, por lo general, son arbitrarias. Por esta razón, las funciones se construyen con *axiomas semánticos* de la forma:

$$\boldsymbol{t} \text{ designa } X \subset C \tag{6.1}$$

o de la forma:

$$\boldsymbol{t} \text{ denota } X \subset \Omega \tag{6.2}$$

En un trabajo científico común estos axiomas no se explicitan y se enuncian con oraciones como "Sea z un número complejo", " ... en donde n es un entero ... " para designación, o "Sea a una partícula", " ... en donde H es (un mol de) hidrógeno" para denotación respectivamente. Salvo raras excepciones, los barbarismos indicados alcanzan para el trabajo cotidiano de un científico. Nosotros también los utilizaremos, por abuso de lenguaje, para acercarnos al lenguaje científico ordinario. Cuando se los enuncia explícitamente, estos axiomas semánticos ocupan alrededor del 90% de la base axiomática de una teoría científica típica.

Las funciones semánticas, establecidas mediante axiomas de la forma (6.1) o (6.2), tienen una limitación fundamental: conectan una expresión en el lenguaje objeto ($\boldsymbol{t}$) con otra expresión en el metalenguaje de la teoría ($X \subset \Omega$). La conexión de esta última con el mundo real queda indeterminada y es responsabilidad del científico, no del filósofo, garantizar la corrección de esta última etapa.

6.3 Verdad

En la sección 2.3 introdujimos la noción de verdad en forma intuitiva y explicamos la interpretación de los conectores lógicos como funciones veritativas pertenecientes al metalenguaje. En esta sección bosquejaremos la forma de asignar valores de verdad a las oraciones (proposiciones) de un contexto, en una forma rigurosa pero que refleje la noción intuitiva de verdad.

6.3.1 La noción de verdad

A cada enunciado elemental del lenguaje le asignaremos un *valor de verdad*, tratando de que estas asignaciones correspondan a la noción intuitiva de *verdadero* (`V`) o *falso* (`F`). Sabemos, como se discutió en el capítulo 1, que esto sólo puede hacerse en el metalenguaje. Examinaremos una forma de hacer esta asignación de verdad a proposiciones, debida a Tarski.

Consideremos una proposición cualquiera, por ejemplo ⌜llueve⌝. En la vida cotidiana diríamos que esta proposición es verdadera si y sólo si ahora está lloviendo. O, más sencillamente:

La proposición ⌜llueve⌝ es verdadera si y sólo si llueve

o, en forma aún más general:

$$\ulcorner \boldsymbol{P} \urcorner \text{ es verdadera si y sólo si } \boldsymbol{P} \tag{6.3}$$

Éste es la *definición de verdad de Tarski*, conocida también como el *criterio de verdad de Tarski*, que permite asignar un valor de verdad a $\ulcorner \boldsymbol{P} \urcorner$ a condición de conocer el estado del mundo real. Estrictamente, el criterio de Tarski conecta una proposición en el lenguaje objeto, con otra proposición en el metalenguaje. Se corre el peligro de caer en un círculo vicioso, pues, a primera vista, para conocer la verdad de la proposición (6.3) necesitaría reformular el problema en el metametalenguaje. Pero, por suerte, esto no es necesariamente así.

Para conocer el valor de verdad de $\ulcorner \boldsymbol{P} \urcorner$, el criterio de Tarski sugiere examinar el estado del mundo real. Podemos reformular (6.3), con algo más de precisión, en la forma:

$$\ulcorner \boldsymbol{P} \urcorner \text{ es verdadera si y sólo si, el estado del mundo real es tal que } \boldsymbol{P} \tag{6.4}$$

La definición de verdad de Tarski tiene una enorme importancia en filosofía, pues define una teoría absoluta de la verdad. Ésta última debe hallarse a través de un examen del mundo real. Es claro que esto no es fácil. Por ejemplo, quiero saber si llueve. Si miro por la ventana puedo saberlo fácilmente, pero si sólo escucho el ruido de agua que cae sobre el techo: ¿llueve o se está derramando el tanque de agua? ¿Llueve o el vecino está limpiando sus canaletas con una manguera? El examen del estado del mundo real, que se hace generalmente en forma indirecta, es difícil y el criterio de Tarski de aplicación delicada.

Finalmente, insistamos en que el criterio de Tarski sólo conecta proposiciones con proposiciones; no conecta proposiciones con hechos. Este último paso es esencial para conocer la verdad de una proposición empírica, pero aún no existe una solución satisfactoria del mismo: el problema de la verdad de proposiciones empíricas está en gran medida abierto.

6.3.2 Verdad y modelos

Examinemos ahora la definición de verdad en una teoría formal aplicando el criterio de Tarski a la formación del modelo. Sea entonces $\mathcal{T}$ una teoría definida sobre un contexto $\mathbb{C} = \langle S, \mathbb{P}, \Omega \rangle$. Introduzcamos ahora una valoración $V : \mathbb{P} \times \Omega \to \mathcal{V}$ (Sec. 2.3.1) asignando a cada oración atómica un valor de verdad con el criterio de Tarski.

Definición 6.6 (Satisfacción).
Sea $P \in \mathbb{P}$ un predicado de $\mathcal{T}$ y t un término. Sea $\mathcal{M}$ un modelo (semántico) de $\mathcal{T}$ y μ la correspondiente función de transformación. Diremos que las oraciones elementales de $\mathcal{M}$ se *satisfacen* en el modelo si:

1. $\ulcorner P(t) \urcorner$ si $\mu(t) \in P$

Como consecuencia, una constante c satisface el predicado si su transformado pertenede a la clase correspondiente, $\exists x P(x)$ se satisface si la clase P no es vacía, etc. Ahora, apliquemos el criterio de Tarski a la noción de satisfacción:

Definición 6.7 (Verdad en un modelo).
La oración atómica $\ulcorner P(x) \urcorner$ es verdadera si y sólo si $P(x)$ se satisface en el modelo.

La definición anterior se completa interpretando (en el modelo) a los conectores lógicos como funciones veritativas, tal como se explicó en la sección 2.3.

6.3.3 Consistencia

Dado un conjunto de axiomas, si éstos son verdaderos, todas las proposiciones de la teoría (generalmente infinitas) son verdaderas. Sin embargo, ¿como prevenir la presencia de un axioma $\mathtt{F}$ en $\mathcal{A}$? La presencia de un axioma $\mathtt{F}$ se detecta, en una teoría puramente formal, porque uno de los teoremas es una contradicción. En este caso, la teoría se dice *inconsistente* y, en caso contrario, *consistente*. La consistencia de una teoría es una necesidad: si una contradicción $\neg(\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{P}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{P}$ es demostrable, entonces *toda* proposición es demostrable y la noción de verdad es irrelevante.

Ejercicio 6.1.
Probar que $\boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{P} \implies \boldsymbol{Q}$

El cálculo de proposiciones debe ser él mismo consistente. Afortunadamente su consistencia puede probarse. Bosquejemos informalmente la demostración.

En primer lugar, trataremos de caracterizar los teoremas del cálculo de proposiciones. Observemos que las reglas de demostración de la tabla 2.3 tienen la propiedad de transformar proposiciones verdaderas en proposiciones verdaderas. Por ejemplo, el *modus ponens* E $\Rightarrow$ transforma las proposicines $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$, ambas verdaderas en la proposición $\boldsymbol{Q}$. Pero, por la tabla de verdad 2.1 $\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$ es

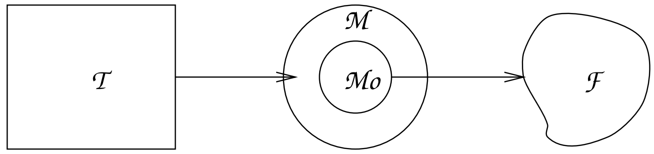


Figura 6.2: Esquema de interpretación factual

verdadera si y sólo si $\boldsymbol{Q}$ es verdadera. En forma similar puede comprobarse esta propiedad para las demás reglas.

Los teoremas de la lógica tienen la propiedad de que su verdad no depende de axiomas o hipótesis previas: estas últimas se eliminan a través de reglas como I $\Rightarrow$ o I$\vee$, que las hacen desaparecer y no hay axiomas. Sospechamos, pues, que estos teoremas sean siempre verdaderos. Esto es fácil de comprobar en el *cálculo de proposiciones*, en donde no se usan los cuantificadores, construyendo las tablas de verdad para los teoremas. Por ejemplo el esquema 2.3 tiene la tabla de verdad:

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P} \Rightarrow (\boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{P})$	
V	V	V $\Rightarrow$ (V $\Rightarrow$ V)	V
V	F	V $\Rightarrow$ (F $\Rightarrow$ V)	V
F	V	F $\Rightarrow$ (V $\Rightarrow$ F)	V
F	F	F $\Rightarrow$ (F $\Rightarrow$ F)	V

Una proposición siempre verdadera se llama una *tautología*. Pero en una demostración con el *modus ponens* como única regla de demostración, el carácter tautológico se conserva. Por lo tanto, todos los teoremas del cálculo de proposiciones son tautologías.

Para demostrar que el cálculo de proposiciones es consistente, basta con hallar una FBF que no sea una tautología. Ejemplos muy sencillos son $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$. Hemos probado (bueno, más o menos) que el cálculo es consistente.

6.4 Modelos factuales

Pasemos ahora a examinar la noción de *modelo factual*: necesaria para examinar a la naturaleza. Es necesario introducir varios nuevos conceptos para analizarlo, conceptos que examinaremos en las secciones que siguen.

6.4.1 Interpretación factual

La aplicación a las ciencias fácticas de la noción de modelo es mucho más compleja y al mismo tiempo mucho más interesante. por lo general, una teoría abstracta $\mathcal{T}$ recibe una interpretación factual si algunas de las constantes de la teoría denotan objetos reales y algunos de los predicados representan propiedades de estos objetos. Sin embargo, es raro que esto ocurra: es mucho más común que la interpretación factual se aplique a un modelo matemático $\mathcal{M}$ de la teoría abstracta.

Daremos, pues, la siguiente:

Definición 6.8 (Modelo factual).
Sea $\mathcal{T}$ una teoría abstracta, $\mathcal{M}$ un modelo de la misma y ϕ una aplicación de un subconjunto $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ en un dominio factual $\mathcal{F}$ (es decir, un conjunto de objetos, estados de objetos o cambios de estado de objetos). Diremos que ϕ es una *aplicación factual* y que el par ordenado $\mathcal{M}_\phi = \langle \mathcal{M}, \phi \rangle$ es un *modelo factual*.

Ejemplo 6.3 (Otro ejemplo sencillo).
Una interpretación factual sencilla del ejemplo 6.1 se obtiene con la siguiente función:

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \text{La Plata}\\ \phi(B) &= \text{Buenos Aires}\\ \phi(C) &= \text{Luján}\\ \phi(a) &= \text{Acceso Norte}\\ \phi(b) &= \text{Autopista Luján - La Plata}\\ \phi(c) &= \text{Autopista La Plata - Buenos Aires}\end{aligned}$$

Ejemplo 6.4 (Simetrías de una red triangular).
Algunas moléculas muy simétricas, como O_3, o la red de vórtices en un superconductor tipo II (o en un superfliudo en rotación) tienen las simetrías de un triángulo equilátero. Podemos construir un modelo de esta teoría con la función:

$$\phi(\{A, B, C\}) = \{V_A, V_B, V_C\}$$

que a cada vértice de $\triangle ABC$ le asigna un objeto (átomo, vórtice, spin de Ising ...) colocado en el mismo. El mapa de interpretación (Definición 2.1) Δ es la composición de la función μ (Ejemplo 6.2) y de ϕ:

$$\Delta = \phi \circ \mu$$

6.4.2 Verdad factual

Introduciremos la noción de *verdad factual* en un modelo utilizando el "criterio" de Tarski (6.4): *Una proposición (oración) es verdadera si y sólo si se corresponde con los hechos.* Una forma precisa de esta definición es la siguiente:

Definición 6.9 (Verdad factual en un modelo).
Sea $\mathcal{M}_\phi$ un modelo factual, definido sobre un contexto $\mathbb{C}$. Una oración $s \in S$ es verdadera si y sólo si $\Delta(s) = \phi[\mu(s)]$ se satisface en $\mathcal{F}$.

Ya hemos discutido que el "criterio" de Tarski es una definición de verdad y no un criterio para determinar la verdad de una proposición (oración). La gnoseología (Cf. Parte IV) y la epistemología (Cf. Parte V) tratan, entre otros problemas, el de la determinación de la verdad factual de una proposición.

Ejemplo 6.5 (Verdad factual en un ejemplo sencillo).
En la teoría factual del ejemplo 6.3, las condiciones de verdad son:

1. El axioma 5.2 es verdadero si y sólo si hay una única autopista entre cada par de ciudades.

2. El axioma 5.3 es verdadero si y sólo si cada autopista pasa (al menos) por dos ciudades distintas.

3. El axioma 5.4 es verdadero si y sólo si por cada ciudad pasan (al menos) dos autopistas.

En la fecha en que esto se escribe, los tres axiomas son (obviamente) falsos.

Como regla general, es casi imposible determinar la vedad factual de los axiomas de una teoría científica[1]. A lo sumo, puede determinarse la verdad de algunas de las consecuencias de los axiomas.

[1] El ejemplo 6.3 es una excepción, construída a propósito, para determinar trivialmente la verdad de los mismos.

Ejemplo 6.6 (Simetrías de la molécula de ozono).
En este caso, la hipótesis no puede comprobarse directamente: la estructura geométrica de la molécula de ozono no puede determinarse por observación directa. La estructura geométrica puede *contrastarse* con la realidad examinando el espectro infrarrojo de la molécula. Sorprendentemente, la hipótesis resulta ser *falsa*.

6.5 Referencia

Hemos construido el mapa de interpretación Δ como la composición de los mapas de interpretación formal μ e interpretación factual ϕ. Por otra parte, en la sección 6.2 introdujimos dos funciones que son parte de los mapas de interpretación: designación y denotación. La primera pertenece a μ mientras que la segunda pertenece a Δ. La conexión entre denotación y designación se logra a través de la relación de *referencia*. Intuitivamente, esta relación responde a la pregunta *¿De qué se trata?*.

6.5.1 Las funciones de referencia

Comenzaremos por definir la función de referencia para un predicado. Como un predicado se aplica a cualquiera de los elementos de Ω o de los subconjuntos Ω_i que aparecen en los argumentos, definamos:

Definición 6.10 (Referencia de predicados).
Sea $P \in \mathbb{P}$ un predicado con dominio $\prod_i \Omega_i$. Entonces, la *función de referencia para predicados*:

$$\mathcal{R}_p : \mathbb{P} \to \mathcal{P}\left(\bigcup_i \Omega_i\right)$$

es tal que:

$$\mathcal{R}_p(P) = \bigcup_i \Omega_i \tag{6.5}$$

Por otra parte, las oraciones del lenguaje objeto pueden referirse a objetos individuales. La función de referencia para enunciados tiene en cuenta esa posibilidad:

Definición 6.11 (Referencia).
Sea una teoría $\mathcal{T}$ provista de una familia de predicados atómicos P_i, con dominios $\prod_i \Omega_i$; y sea S el conjunto de los enunciados formados con ellos. La función:

$$\mathcal{R} : S \to \mathcal{P}\left(\bigcup_i \Omega_i\right)$$

llamada *función de referencia*, satisface las condiciones:

1. Si $s \in S$ es una constante c o una variable x:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(c) &= c \\ \mathcal{R}(x) &= x \end{aligned} \tag{6.6}$$

2. Si s es $\tau x P(x)$,

$$\mathcal{R}\left[\tau x P(x)\right] = \mathcal{R}_p\left(P\right) \tag{6.7}$$

3. Si $s \in S$ es una proposición atómica P_i, formada reemplazando los parámetros del predicado por términos t_i:

$$\mathcal{R}\left[P(t_1, \ldots t_n)\right] = \bigcup_i \mathcal{R}(t_i) \tag{6.8}$$

4. Si s es una proposición compuesta, combinando proposiciones atómicas s_i a través de los operadores lógicos:

$$\mathcal{R}(s) = \bigcup_i \mathcal{R}(s_i) \tag{6.9}$$

La conexión entre las relaciones de denotación, designación y referencia es la siguiente. Si $\mathcal{D}, \mathbb{D}, \mathcal{R}$ designan los grafos de las respectivas funciones:

$$\mathbb{D} = \mathcal{D} \circ \mathcal{R} \tag{6.10}$$

y así, la relación de denotación queda definida completamente a través de las relaciones de designación y referencia.

6.5.2 La clase de referencia

Con esta definición, podemos introducir otro concepto importante:

Definición 6.12 (Clase de referencia).
La *clase de referencia* del predicado P o del enunciado s son, respectivamente, $\mathcal{R}_p(P)$ y $\mathcal{R}(s)$. En particular, la clase de referencia de una teoría $\mathcal{T}$ es $\mathcal{R}\left(\bigwedge_i A_i\right)$.

La noción de clase de referencia es muy importante. Veamos algunos ejemplos para aclararla:

Ejemplo 6.7 (Mutaciones).
La clase de referencia del predicado

⌜El organismo a muta al organismo b⌝

es el conjunto de los organismos.

Ejemplo 6.8 (Paralelismo).
La clase de referencia del predicado ⌜$r \parallel r'$⌝ es el conjunto de las rectas del plano.

Ejemplo 6.9 (Triángulos).
La clase de referencia de la proposición

⌜Todos los triángulos equiláteros son equiángulos⌝

es el conjunto de los triángulos.

Ejemplo 6.10 (Triángulos).
La clase de referencia de la proposición

⌜En todo triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo⌝

es la unión de los conjuntos de los triángulos, lados y ángulos.

Ejemplo 6.11 (Transformaciones de Lorentz).
La clase de referencia de la proposición

⌜Los sistemas de referencia K y K' están conectados
por una transformación de Lorentz⌝

es el conjunto de todos los cuerpos físicos que pueden ser sistemas de referencia.

En particular, en el último ejemplo, los observadores no pertenecen a la clase de referencia.

6.5.3 Referencia factual

Para la aplicación a las ciencias naturales, es importante determinar la *clase de referencia factual* de un constructo.

Definición 6.13 (Referencia factual).
Sea $c \in C$ un constructo y

$$\mathcal{R}(c) = \bigcup_i \Omega_i$$

su clase de referencia. La *clase de referencia factual* es:

$$\mathcal{R}_F(c) = \{\Omega_i | \Omega_i \not\subset C\}$$

Por ejemplo, en los ejemplos anteriores la clase de referencia factual del predicado $\ulcorner x$ muta a $y\urcorner$ es el conjunto de los organismos:

$$\mathcal{R}_F(\text{muta}) = \mathcal{R}(\text{muta})$$

mientras que la del predicado ⌜triángulo⌝ es el conjunto vacío:

$$\mathcal{R}_F(\text{triángulo}) = \varnothing$$

Por lo general, la clase de referencia factual es un subconjunto propio de la clase de referencia: $\mathcal{R}_F(c) \subsetneq \mathcal{R}(c)$. Por ejemplo: en la proposición:

$$c = \ulcorner\text{Los rayos de luz se representan por curvas}\urcorner \tag{6.11}$$

tendremos:

$$\mathcal{R}_F(c) = \{\text{“rayos de luz”}\} \subsetneq \mathcal{R}(c) = \{\text{“rayos de luz”}, \text{“curvas”}\} \tag{6.12}$$

Ejemplo 6.12.
(Ley de gravitación de Newton) En el ejemplo 5.7, la clase de referencia factual tiene dos elementos: {“campo gravitacional”, “cuerpos”}

Llamaremos *factualmente vacío* a una tautología o a un constructo cuya clase de referencia factual es vacía. Un constructo *factual* es uno que no es factualmente vacío. En esta definición es necesario incluir a las tautologías por separado, porque aunque una tautología no afirma nada acerca de sus referentes, puede tener una referencia factual no vacía. Por ejemplo, la oración: “Funes es memorioso o no es memorioso” es tautológica y tiene una referencia factual no nula: {“Funes”}.

6.6 Homogeneidad referencial

Estamos ahora en condiciones de examinar algunas propiedades importantes de teorías definidas sobre contextos cerrados. Estas teorías forman un modelo idealizado del conocimiento científico, aunque pocas veces se presentan en la actividad cotidiana del científico. En principio, toda teoría suficientemente desarrollada puede transformarse en un contexto cerrado añadiendo algunas hipótesis y excluyendo las referencias a entidades extrañas. En lo que sigue, examinaremos agunas de las propiedades de estas teorías.

6.6.1 Semántica en un contexto cerrado

Las funciones semánticas definidas sobre un contexto cerrado tienen propiedades únicas, que no existen para otros contextos. Ante todo, observemos que la noción de contexto restringe el conjunto de predicados y proposiciones a una clase de referencia común $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(\mathbb{P}) \subset D$. Más aún, esta clase de referencia queda determinada sólo por los axiomas. En efecto:

Teorema 6.1 (Conservación de la referencia).
La clase de referencia de la teoría es la misma que la de los axiomas:

$$\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(\mathcal{A})$$

Así pues, el teorema 6.1 y la definción de clase de referencia de un constructo 6.12 proporcionan un *algoritmo efectivo* para determinar la clase de referencia de una teoría.

El teorema 6.1 significa, intuitivamente, que no se introducen conceptos extraños a lo largo de las demostraciones. Esto sucede por el uso descuidado del *Principio de adición* $I\vee$ (Sect. 2.5). Como permite la adición de una proposición arbitraria a otra ya demostrada, se puede añadir alguna exterior al contexto. Por ejemplo, la mención de observadores (seres dotados de una mente, objeto de estudio de la sicología) se introducen en física (especialmente en Relatividad General y Mecánica Cuántica) a través del principio de adición.

La teoría se llama factual si $\mathbb{P}$ contiene predicados factuales. En un contexto cerrado vale un resultado aún más fuerte:

Teorema 6.2 (Conservación de la referencia factual).
La clase de referencia factual de $\mathcal{T}$ es la unión de las clases de referencia factuales de los axiomas:

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}) = \bigcup_i \mathcal{R}(A_i)$$

es decir, en un contexto cerrado no se introducen elementos factuales nuevos a lo largo del desarrollo lógico de la teoría.

6.6.2 Homogeneidad referencial

Pasemos ahora a definir una noción semántica importante: la de *homogeneidad referencial*.

Definición 6.14 (Equireferencia).
Dos constructos c y c', pertenecientes a un contexto $\mathbb{C}$ se llaman *equireferenciales en* $\mathbb{C}$ si ambos tienen la misma clase de referencia:

$$c \sim_r c' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}(c) = \mathcal{R}(c')$$

La relación $\sim_r$ es una relación de equivalencia e induce sobre el conjunto D una partición en clases de equireferentes. Un contexto $\mathbb{C}$ se llama *referencialmente homogéneo* si existe una única clase de equivalencia en D.

Ejemplo 6.13 (Termodinámica y Mecánica estadística).
La termodinámica y la mecánica de fluidos son referencialmente homogéneas; en cambio la Mecánica Estadística y la termodinámica son referencialmente heterogéneas, porque la primera se refiere a fluidos formados por moléculas mientras que la segunda los trata como cuerpos continuos.

Definición 6.15 (Contexto factual).
Un contexto se llama *factual* $\mathbb{C}_F$ si $\mathbb{P}$ contiene al menos un predicado factual. En caso contrario, el contexto se denomina *formal*.

Definición 6.16 (Predicado maximal).
Dado un contexto factual $\mathbb{C}_F$, se llama *predicado maximal* $P_{\max}$ aquel que tiene la clase de referencia más inclusiva.

6.6.3 Relevancia y conmensurabilidad

Una importante noción semántica es la *relevancia* de una proposición o de un constructo c para otro elemento de una teoría. Un ejemplo de las dificultades que se originan cuando la relevancia se ignora es la *paradoja de la confirmación*.

Consideremos la proposición:

$$\begin{gathered} \ulcorner\text{Todos los cuervos son negros}\urcorner \\ \forall x\,[\text{Cuervo}(x) \Rightarrow \text{Negro}(x)] \end{gathered} \tag{6.13}$$

donde la segunda línea es una traducción formal razonable de la primera. La paradoja consiste en observar que la proposición (6.13) es equivalente a:

$$\begin{gathered} \ulcorner\text{Todo lo que no es negro no es cuervo}\urcorner \\ \forall x\,[\neg\text{Negro}(x) \Rightarrow \neg\text{Cuervo}(x)] \end{gathered} \tag{6.14}$$

y por lo tanto, parecería que encontrar algo, cualquier cosa, (un libro, Claudia Schiffer, una computadora o una ensalada mixta) que no sea ni negro ni cuervo, es una confirmación de la proposición (6.13). La paradoja se resuelve observado que la clase de referencia de las proposiciones (6.13) y (6.14) es: $\ulcorner$aves$\urcorner$, mientras que las clases de referencia de los otros ejemplos son muy distintas. Estos otros ejemplos no son *relevantes* para la ornitología.

Formalizaremos esta noción en varias etapas.

Definición 6.17 (Relevancia sintáctica).
Diremos que un constructo c es *sintácticamente relevante* para otro c' si y sólo si c es necesario para la construcción o demostración de c'.

Definición 6.18 (Relevancia semántica).
c es *semánticamente relevante* para c' si y sólo si c es sintácticamente relevante y además, ambos tienen referentes comunes: $\mathcal{R}(c) \cap \mathcal{R}(c') \neq \varnothing$.

Definición 6.19 (Relevancia referencial).
Un hecho h es *referencialmente relevante* para c si pertenece a la clase de referencia de c: $h \in \mathcal{R}(c)$.

Definición 6.20 (Relevancia evidencial).
Un hecho empírico e es *evidencialmente relevante* para c si y sólo si existe otro constructo c', sintácticamente relevante para c, y e es referencialmente relevante para c'.

Una noción emparentada con la de relevancia es la noción de *conmensurabilidad* de dos teorías científicas.

Definición 6.21 (Conmensurabilidad referencial).
Dos teorías factuales $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son *referencialmente conmensurables* si y sólo si tienen referentes comunes:

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{R}(\mathcal{T}') \neq \varnothing$$

Definición 6.22 (Conmensurabilidad metódica).
Dos teorías factuales $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son *metódicamente conmensurables* si y sólo si tienen en común un conjunto $E = \{e\}$ de datos empíricos evidencialmente relevantes.

Definición 6.23 (Conmensurabilidad).
Dos teorías factuales $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son *conmensurables* si y sólo si son al mismo tiempo referencial y metodológicamente conmensurables.

La noción de conmensurabilidad fue introducida por Kuhn [89] y Feyerabend [51], quenes afirmaron que teorías "revolucionarias" eran inconmensurables con sus predecesoras.

Ejemplo 6.14 (Mecánicas newtoniana y relativista).
El ejemplo clásico de inconmensurabilidad son las mecánicas newtonianas y relativistas, y el ejemplo aducido es que la masa, en relatividad especial depende del sistema de referencia (Feyerabend) y que está conectada con la energía (Kuhn). Sin embargo, de acuerdo con las definiciones rigurosas 6.21, 6.22 y 6.23, ambas teorías son conmensurables: tienen la misma clase de referencia:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathsf{MR}) &= \mathcal{R}(\mathsf{MC}) && (6.15)\\ &= \{\text{cuerpos}\} \cup \{\text{sistemas de referencia}\} && (6.16) \end{aligned}$$

y comparten un conjunto de hechos experimentales evidencialmente relevantes: toda la mecánica de "pequeñas velocidades".

Capítulo 7

Significado

Comenzaremos ahora el análisis de la noción de *significado* de un constructo c. Este último, intuitivamente, es la clase de equivalencia de oraciones sinónimas (Cf. Sec. 2.1); pero ¡dos oraciones son sinónimas (intuitivamente) si tienen el mismo significado! Este círculo vicioso puede romperse en un lenguaje formal si se da una definición rigurosa de sinonimia de dos oraciones. En las secciones siguientes se intenta desarrollar esa noción y analizar sus consecuencias.

7.1 Extensión e Intensión

Comencemos por discutir las nociones clásicas de *extensión* e *intensión* de un predicado. Llamaremos extensión de un predicado $\boldsymbol{P(x)}$ al conjunto de elementos de Ω que posee la propiedad correspondiente:

$$\mathcal{E}_P = \{x|\boldsymbol{P}x\} \tag{7.1}$$

Usando la noción de verdad introducida en la sección 6.3, la extensión de un predicado es la clase (conjunto) de elementos que hacen la oración $\boldsymbol{P(t)}$ verdadera. Por ejemplo, en astronomía el predicado

$$Pl(x) = \ulcorner x \text{ es un planeta del Sistema Solar}\urcorner \tag{7.2}$$

tiene la extensión:

$$\mathcal{E}_{Pl} = \{\text{Mercurio}, \ldots, \text{Neptuno}\} \tag{7.3}$$

La intensión o *connotación* de un predicado, en cambio, es el conjunto de enunciados (proposiciones) asociados con él. Por ejemplo, la intensión de Pl es:

$$\begin{aligned}&\ulcorner\text{Los planetas se mueven en órbitas elípticas}\urcorner\\&\ulcorner\text{El Sol ocupa uno de los focos de la elipse}\urcorner\\&\ldots\end{aligned} \tag{7.4}$$

Así pues, extensión e intensión de un predicado describen en forma complementaria dos aspectos del mismo. Groseramente, la intensión describe el conjunto de propiedades asociadas a un predicado mientras que la extensión describe el conjunto de objetos que satisface el predicado.

Extensión e intensión son, además complementarios en otro sentido: a medida que la intensión aumenta (es decir, que se exigen propiedades más detalladas) la extensión disminuye. Así, por ejemplo, el predicado:

$$Pl_T(x) \Leftrightarrow \ulcorner x \text{ es un planeta tipo terrestre}\urcorner \tag{7.5}$$

tiene la extensión reducida:

$$\mathcal{E}_{Pl_T} = \{\text{Mercurio}, \ldots \text{Marte}\} \tag{7.6}$$

En esta sección daremos definiciones formales de extensión e intensión y en las siguientes mostraremos una manera de construir la intensión de un constructo arbitrario en un contexto cerrado.

7.1.1 Extensión

Comencemos por una definición formal de la extensión de un predicado (relación) n-ario:

Definición 7.1 (Extensión).
Sea P un predicado n-ario definido sobre un dominio $D \subset \Omega$. Llamamos la *extensión* de P al conjunto:

$$\mathcal{E}(P) = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in D^n | P(x_1, \ldots, x_n)\}$$

Con esta definición debe quedar claro que la extensión no coincide con la referencia. En efecto, consideremos el predicado binario $\ulcorner x$ ama $y \urcorner$. Este predicado tiene las extensiones y referencias:

$$\mathcal{R}(\text{ama}) = \{\text{Antonio}, \text{Dante}, \text{Cleopatra}, \text{Beatriz}, \ldots\} \tag{7.7}$$
$$\mathcal{E}(\text{ama}) = \{\langle \text{Antonio}, \text{Cleopatra} \rangle, \langle \text{Dante}, \text{Beatriz} \rangle, \ldots\} \tag{7.8}$$

que son, obviamente, conjuntos distintos.

Las propiedades de la extensión están contenidas en el siguiente

Teorema 7.1 (Propiedades de la estensión).
Si $\boldsymbol{P}$ *y* $\boldsymbol{Q}$ *son predicados definidos sobre un dominio común* D*, entonces:*

1. $\mathcal{E}(\neg P) = \complement\, \mathcal{E}(P)$
2. $\mathcal{E}(P \vee Q) = \mathcal{E}(P) \cup \mathcal{E}Q$
3. $\mathcal{E}(P \wedge Q) = \mathcal{E}(P) \cap \mathcal{E}Q$

Con él se puede calcular las extensiones de predicados compuestos a partir de las de predicados primitivos.

Ejercicio 7.1 (Extensión de implicación y equivalencia).
Calcular la extensión de $P \Rightarrow Q$ y $P \Leftrightarrow Q$.

Con los resultados del teorema 7.1 y del ejercicio 7.1 se puede probar el siguiente teorema:

Teorema 7.2 (Isomorfismos de álgebras de Boole).
Existe un isomorfismo entre el álgebra de Boole de los predicados $P \in U$ *y el álgebra de Boole de los subconjuntos de* U*.*

Este resultado es obvio en el caso de predicados monádicos, puesto que, por el Principio de Quine (3.5), cada predicado monádico determina el conjunto formado por los elementos que tienen la propiedad correspondiente.

Para las aplicaciones a las ciencias naturales, es importante definir la *extensión factual* de un predicado.

Definición 7.2 (Extensión factual).
Sea $P \in \mathcal{P}$ un predicado y $\mathcal{E}(\mathrm{P})$ su extensión. La *extensión factual* de P es:

$$\mathcal{E}_F(P) = \mathcal{E}(P) \cap \complement\, C$$

Esta definición, como muchas otras que siguen, es análoga a la definición 6.13 de clase de referencia factual.

7.1.2 Intensión

Para definir intensión, consideremos un conjunto U de enunciados o predicados, no necesariamente pertenecientes a un contexto. Definiremos la intensión en este caso general y en la próxima sección mostraremos cómo puede calcularse en el caso de un contexto cerrado.

Definición 7.3 (Intensión).
La intensión $\mathcal{I}$ es una función

$$\mathcal{I} : U \to \mathcal{P}(U)$$

tal que si $P, Q \in U$

1. $\mathcal{I}(P \wedge Q) = \mathcal{I}(P) \cup \mathcal{I}(Q)$
2. $\mathcal{I}(\neg P) = \complement \mathcal{I} P$
3. $P = Q \Rightarrow \mathcal{I}(P) = \mathcal{I}(Q)$

El primer axioma puede extenderse para una familia arbitraria de enunciados $P_{i\in I}$ en la forma:

$$\mathcal{I}\left(\bigwedge_{i\in I} P_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{I}(P_i) \tag{7.9}$$

Con la definición anterior, es posible demostrar las propiedades de la intensión $\mathcal{I}$.

Teorema 7.3 (Propiedades de la intensión).
Si $P, Q \in U$ entonces

1. $\mathcal{I}(P \vee Q) = \mathcal{I}(P) \cap \mathcal{I}(Q)$
2. $\mathcal{I}(P \Rightarrow Q) = \mathcal{I}(P) - \mathcal{I}(Q)$
3. $\mathcal{I}(P \Leftrightarrow Q) = \mathcal{I}(P) \Delta \mathcal{I}(Q)$

Teorema 7.4 (Otras propiedades de la intensión).
Si $P \in U$ entonces

1. $\mathcal{I}(\neg\neg P) = \mathcal{I}(P)$
2. $\mathcal{I}(P \vee \neg P) = \varnothing$
3. $\mathcal{I}(P \wedge \neg P) = U$

Estos teoremas (cuya demostración se deja como ejercicio) muestran que existe un *isomorfismo dual* o *antiisomorfismo* entre el álgebra de Boole del conjunto de proposiciones U y el álgebra de Boole sobre el conjunto de las intensiones $\mathcal{I} \subset U$.

7.1.3 Extensión e intensión

Finalmente, vamos a comparar las nociones de intensión y extensión en una teoría. Ante todo, observemos que si bien toda proposición tiene una intensión, sólo las funciones proposicionales tienen extensiones no vacías. Nos limitaremos, pues a comparar intensiones y extesnsiones en una familia de predicados.

El resultado fundamental está dado por el siguiente

Teorema 7.5 (Ley del inverso).
Si P y Q son dos predicados definidos sobre el mismo dominio D, entonces:

1. $\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}(Q) \Rightarrow \mathcal{E}(P) = \mathcal{E}(Q)$
2. $\mathcal{I}(P) \subset \mathcal{I}(Q) \Rightarrow \mathcal{E}(P) \supset \mathcal{E}(Q)$

Este teorema enuncia la *ley del inverso*: la extensión de un predicado aumenta cuando su intensión decrece.

La *intensión factual* de un predicado se define en forma un poco más complicada que la extensión factual:

Definición 7.4 (Intensión factual).
Sea $c \in C$ una proposición, $\mathcal{I}(c)$ su intensión y $\mathcal{R}(c)$ su clase de referencia. La intensión factual de c es:

$$\mathcal{I}_F(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \mathcal{I}(c) \wedge \mathcal{R}(x) \cap \complement C \neq \varnothing\}$$

La intensión factual de c es, pues, el subconjunto de la intensión factualmente significativo.

7.2 Sentido

Vamos a examinar otra manera de caracterizar el conjunto de proposiciones ligadas a un constructo c. Esta caracterización, como veremos, es distinta de la intensión, aunque está conectada con ella.

Sin embargo, uno de los objetivos de este capítulo es caracterizar a ciertos constructos como proposiciones. Por lo tanto, conenzaremos trabajando con un conjunto de *oraciones* S_0.

7.2.1 Aspecto principal

Comenzaremos definiendo el

Definición 7.5 (Aspecto principal).
Dado un contexto cerrado $\mathbb{C}_0 = \langle S_0, \mathbb{P}, D \subseteq \Omega \rangle$, se llama *aspecto principal* de una oración $s \in S_0$, al tenor de s: $\mathbb{J}(c)$.

El tenor incluye, por supuesto, todas las proposiciones formales, semánticas y específicas de S_0 que implican a s. No todas estas proposiciones, sin embargo, van a caracterizar a s de la misma manera. En particular, las tautologías se utilizan como herramientas de demostración en toda teoría y por lo tanto son comunes a todo constructo. Para afinar esta caracterización de la teoría definimos dos nuevos conceptos:

Definición 7.6 (Aspecto extralógico).
Sea $\mathbb{C}_0$ un contexto y $L \subset S_0$ el conjunto de tautologías (oraciones puramente lógicas). Se llama el *aspecto extralógico* de s a

$$\mathbb{J}_E(s) = \mathbb{J}(s) - L$$

Definición 7.7 (Aspecto factual).
Sea $\mathbb{C}$ un contexto y $F_v \subseteq S_0$ el conjunto de oraciones factualmente vacías. Se llama *aspecto factual* de s a:

$$\mathbb{J}_F(s) = \mathbb{J}_E(s) \cap \complement F$$

Por definición, el aspecto principal de un axioma es el axioma mismo. El aspecto principal de una teoria $\mathcal{T}$ (Def 5.17) es la unión de los aspectos principales de todas las oraciones de$\mathcal{T}$. De la misma manera, puedo definir los aspectos extralógico y factual de $\mathcal{T}$.

7.2.2 Contenido

Pasemos ahora a la definicón dual:

Definición 7.8 (Contenido).
Dado un contexto $\mathbb{C}$, se llama el *contenido* de una oración $s \in S_0$ a la discurrencia de s: $\mathbb{F}(s)$.

Nuevamente, podemos definir los contenidos extralógicos y factual de s, que lo caracterizan mejor:

Definición 7.9 (Contenido extralógico).
Con la misma notación que en la definición 7.6:

$$\mathbb{F}_E(s) = \mathbb{F}(s) - L$$

Definición 7.10 (Contenido Factual).
Con la misma notación que en la definición 7.7:

$$\mathbb{F}_F(s) = \mathbb{F}_E(s) \cap \complement F_v$$

7.2.3 Sentido completo

Finalmente, estamos en condiciones de definir el sentido de una oración:

Definición 7.11 (Sentido completo).
Sea un contexto cerrado $\mathbb{C}$ y $s \in S$. Se llama *sentido completo* de s a la unión de su aspecto principal y contenido:

$$\mathbb{S}(s) = \mathbb{J}(s) \cup \mathbb{F}(s)$$

En la misma forma, se puede definir el sentido extralógico y el sentido factual de s. El sentido completo de una teoría $\mathcal{T}$ es la unión de los sentidos de sus teoremas. Un caso particular importante es el de un axioma: su aspecto principal se reduce al axioma y por lo tanto el sentido de un axioma es igual a su contenido. Como en un contexto cerrado no hay otras proposiciones que las de S, se tiene que cumplir:

Teorema 7.6 (Intensión de un axioma).
La intensión de un axioma A de una teoría $\mathcal{T}$ definida en un contexto cerrado $\mathbb{C}$, es igual a su sentido completo:

$$\mathcal{I}(A) = \mathbb{S}(A)$$

Puesto que la intensión de cualquier proposición de $\mathcal{T}$ se puede calcular a partir de la intensión de los axiomas, tenemos el importante resultado:

Teorema 7.7 (Intensión de un teorema).
La intensión de un teorema $\vdash P$ está contenida en su sentido completo:

$$\mathcal{I}(P) \subset \mathbb{S}(P)$$

7.2.4 Ejemplos

Examinemos algunos ejemplos sencillos de sentido en teorías formalizadas. El sentido de una teoría es, en general, un reticulado infinito, imposible de representar gráficamente. Por ello, esbozaremos el sentido de una oración s de la teoría indicando los pasos más importantes de una demostración, o los teoremas más importantes del sentido completo. Llamaremos *sentido esquemático* a esa simplificación.

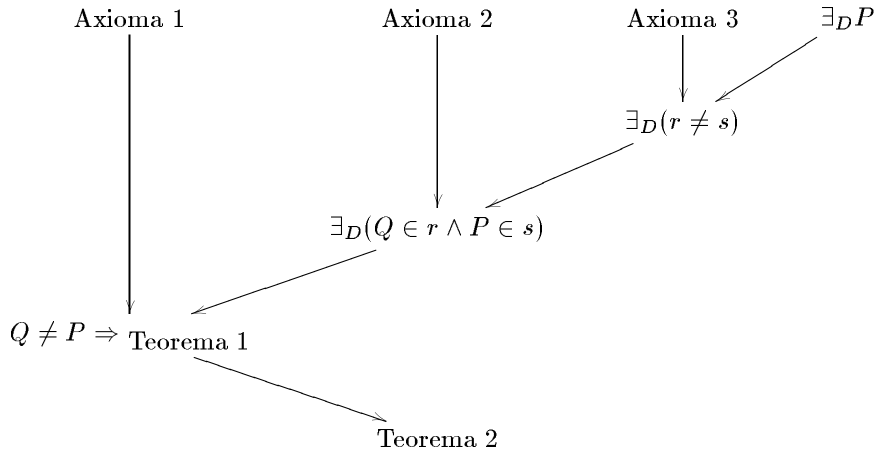


Figura 7.1: Sentido del teorema 1 de la teoría modelo

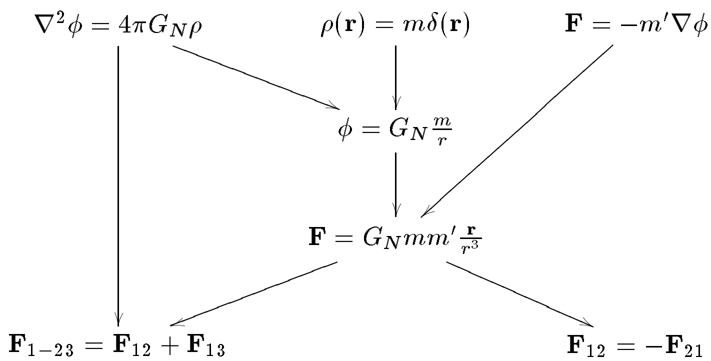


Figura 7.2: Sentido de la ley de Newton

Ejemplo 7.1 (Una teoría sencilla).
La figura 7.1 muestra el sentido del teorema 5.17 en la teoría del ejemplo 5.3.4.

Un ejemplo mucho menos trivial es el sentido de la ley de Newton en la teoría esbozada en el ejemplo 5.7.

Ejemplo 7.2 (Ley de gravitación de Newton).
En el ejemplo 5.7, el sentido completo de la ley de gravitación de Newton 5.9 es la unión del tenor y la discurrencia:

$$\{\text{Ax. } 5.1, \text{Defs. } 5.12 \text{ y } 5.13, \text{Teos. } 5.8,\ 5.9,\ 5.10,\ 5.11,\ 5.12 \text{ y } 5.13\}$$

La figura 7.2 muestra la estructura de retículo del sentido de la ley de gravitación universal.

7.3 Representación

La noción de sentido asocia con cada oración de un lenguaje formalizado un conjunto de oraciones asociadas a través de la relación de consecuencia '$\vdash$'. Pero el sentido se construye a partir de un conjunto de axiomas, definiciones y convenciones que reflejan las hipótesis fundamentales sobre las que se sonstruye la teoría. Este conjunto de hipótesis define la *relación de representación* de la teoría.

Tabla 7.1: Ejemplos de representación en la mecánica clásica

Constructo	Representa	Referencia
$\mathbb{E}^3$	Espacio físico	—
$\mathbf{p}_a$ $\mathbf{F}_{ab}$	Impulso de la partícula a Fuerza entre las partículas a y b	Partícula a Partículas a y b
$\dot{\mathbf{p}}_a = \sum_b \mathbf{F}_{ab}$	Ley de movimiento	Partícula a y el conjunto de las partículas.
Mecánica Newtoniana	Movimiento e interacción entre partículas.	Conjunto de las partículas.

No debe confundirse la relación de referencia con la de representación. Mientras que la relación de referencia $\mathcal{R}$ asocia un constructo con un objeto, la relación de representación $\hat{\Rightarrow}$ asocia un constructo con propiedades de un objeto. En una dada teoría $\mathcal{T}$ esto se hace a través de un *atributo*: un predicado o relación que asocia el objeto con esa propiedad. Son estos atributos los que enuncian hipótesis científicas y constituyen el corazón de la interpretación de una teoría.

Ejemplo 7.3 (Partícula clásica).
En mecánica clásica, las propiedades de una partícula se representan con vectores $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ o con escalares m.

Ejemplo 7.4 (Masas molares).
En química, las *masas molares* de un elemento se representan con el símbolo químico correspondiente.

Ejemplo 7.5 (Sistemas cuánticos).
En mecánica cuántica, las propiedades de un sistema se representan con operadores del espacio de Hilbert.

Ejemplo 7.6 (Propiedades zoológicas).
En zoología o paleontología, las propiedades de un animal se representan con palabras del lenguaje ordinario, generalmente adjetivos, a las que se le asigna un significado técnico o con noelogismos incluídos en el lenguaje natural. Así, la *poseer piezas bucales* en un insecto tienen poco que ver con *poseer piezas bucales* en un mamífero, y los corales hermatípicos no significan nada para la mítica Doña Rosa.

Pasemos a formalizar esta relación. Sea $x \in \Omega$ un objeto y sea $P(x)$ el conjunto de todas las posibles propiedades del objeto.

Definición 7.12 (Representación).
Sea $\mathcal{T}$ una teoría sobre objetos de $K \subset \Omega$ y sea $\mathcal{P}_K = \bigcup_{x \in K} S(x)$ la unión de las propiedades de los objetos en K. Diremos que $\mathcal{T}$ es una *representación* de los K si existe una función:

$$\hat{\Rightarrow}: \mathcal{P}_K \to \mathcal{T}$$

que a cada estado $P \in \mathcal{P}_K$ le hace corresponder un enunciado $E \in \mathcal{T}$.

Como en el caso de las funciones de desisgnación y denotación, la función de representación debe construirse con axiomas adecuados. En efecto, la representación asigna nombres a propiedades y éstos son, en principio, arbitrarios.

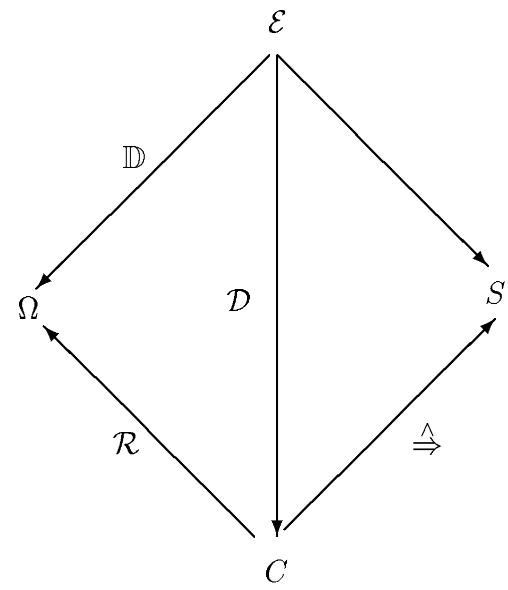


Figura 7.3: Conexiones entre las funciones semánticas

Ejemplo 7.7 (Ley de gravitación de Newton).
En el ejemplo 5.7, la función de representación quedará definida por axiomas como estos:

Axioma 7.1 (Masa).

$$m \stackrel{\wedge}{\Rightarrow} \textit{ la masa de una partícula}$$

Axioma 7.2 (Potencial).

$$\phi \stackrel{\wedge}{\Rightarrow} \textit{ el potencial del campo gravitacional}$$

También el axioma 5.1, que enuncia una ley física (propiedad de un sistema), y las definiciones 5.12 y 5.13 son hipótesis científicas y pertenecen a la definición de la función de representación.

Las relaciones de referencia y representación no tienen relaciones simples entre sí. Ambas pueden tomarse como relaciones primitivas de la metateoría que estudia las teorías $\mathcal{T}$. La tabla 7.1 muestra ejemplos de la conexión entre ambas funciones en el caso de la mecánica clásica. La figura 7.3 ilustra las interconexiones entre las funciones semánticas.

7.4 Significado

Vamos, por fin, a considerar el *significado* de un constructo c. En realidad, será necesario discutir varias formas de la noción de significado: aplicadas a un constructo c o a nombre $N(c)$ que lo designa. En este caso, hablaremos de la *significancia* del nombre.

7.4.1 Significado de un constructo

Sea un contexto $\mathbb{C} = \langle S, \mathbb{P}, D\rangle$; sea $\mathcal{R}(c) : S \to \mathcal{P}(D)$ la función de referencia del contexto (Def. 6.11) y sea $\mathbb{S} : S \to \mathcal{P}(S)$ la función sentido. Definiemos el significado del constructo c como el par ordenado de su sentido y su referencia:

$$\mathcal{M}(c) = \langle \mathbb{S}(c), \mathcal{R}(c)\rangle \tag{7.10}$$

Con más precisión, la definición de significado será:

Definición 7.13 (Significado).
Sea un contexto $\mathbb{C}$. La función:

$$\mathcal{M} : S \to \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(D)$$

con valores dados por la ecuación (7.10) se llama *función de significado* del contexto. Su valor para un constructo c se llama el *significado de* c.

Vemos que la estructura del significado es complicada: un par ordenado de conjuntos, ambos potencialmente infinitos. Sin embargo, esta estructura formaliza adecuadamente la noción común de significado. Examinemos un ejemplo sencilla e importante:

Ejemplo 7.8 (Ley de gravitación de Newton).
En el ejemplo 5.7, el significado de la ley de gravitación de Newton es el par ordenado de la referencia 6.12 y el sentido 7.2. Examinando estos dos conjuntos, es fácil ver que en el contexto (esquemático) con que estamos trabajando, el significado de la ley de Newton traduce en forma rigurosa la noción informal: *La ley de gravitación de Newton representa la* fuerza *originada por el* campo gravitacional *entre dos* cuerpos.

Si ahora consideramos el *espacio de significado* de una teoría $\mathcal{T}$, definida sobre un contexto cerrado $\mathbb{C}$. Este conjunto, que denominaremos el *significado de* $\mathbb{C}$, es la totalidad de los significados de S (o de $\mathbb{P}$):

$$\mathcal{M}(S) = \bigcup_{c \in S} \mathcal{M} c \tag{7.11}$$

Sobre este conjunto puede definirse un álgebra de significados de la manera siguiente:

Definición 7.14 (Álgebra de significados).
Sean c, d constructos pertenecientes a $S \in \mathbb{C}$. Definimos:

$$\mathcal{M}(c) \oplus \mathcal{M}(d) = \langle \mathbb{S}(c) \cup \mathbb{S}(d), \mathcal{R}(c) \cup \mathcal{R}(d)\rangle \tag{7.12}$$
$$\mathcal{M}(c) \otimes \mathcal{M}(d) = \langle \mathbb{S}(c) \cap \mathbb{S}(d), \mathcal{R}(c) \cap \mathcal{R}(d)\rangle \tag{7.13}$$
$$\ominus \mathcal{M}(c) = \langle \complement\mathbb{S}(c), \complement\mathcal{R}(c)\rangle \tag{7.14}$$

No es difícil verificar que las definiciones anteriores satisfacen algunas de las identidades de un álgebra de Boole, pero lamentablemente el sentido "no cierra": $\mathbb{S}(c) \cup \mathbb{S}(d)$ no tiene ninguna relación sencilla con los sentidos de C y d. Por lo tanto, el "algebra de significados" no es tal. Sin embargo, si se reemplaza es sentido completo por las intensiones, se demuestra que el "significado intensional" (restingido a las intensiones que, como hemos visto, son partes del sentido) forma un álgebra de Boole.

7.4.2 Significancia y sinonimia

Pasemos ahora a definir la *significancia* de un elemento del lenguaje.

Definición 7.15 (Significancia).
Sea Σ el conjunto de FBFs de un lenguaje conceptual $\mathcal{L}$ y sea $\mathcal{D}$ la función designación. Se llama *función significancia* a la composición:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{G}} = \mathcal{M} \circ \mathcal{D} \tag{7.15}$$

La significancia, pues, atribuye a un elemento liguístico (una FBF) el significado del constructo que designa.

Definición 7.16.
Un signo $\mathfrak{s} \in \mathcal{L}$ es *significante* si designa un constructo en $\mathcal{L}$. Un signo sin significancia se llama *sincategoremático*

Existe una diferencia fundamental entre signo y constructo: los primeros son convencionales y la función designación es, en principio, arbitraria. Por el contrario, los constructos designados están determinados por el contexto con el que describimos leyes matemáticas o científicas. Sin embargo, la significancia queda determinada una vez que se construye la función designación y el contexto cerrado de la teoría. En la sección 2.1 se sugirió que un constructo es una clase de equivalencia de elemntos ligüísticos. En particular, una proposición la explicamos (intuitivamente) como una clase de equivalencia de oraciones. Con la noción de significancia podemos definir con más precisión la sinonimia:

Definición 7.17 (Sinónimos).
Dos signos $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}' \in \mathcal{L}$ son sinónimos si tienen la misma significancia:

$$\mathfrak{s} \overset{\text{sin}}{=} \mathfrak{s}' \overset{\text{def}}{=} \mathcal{S}_{\mathcal{G}}(\mathfrak{s}) = \mathcal{S}_{\mathcal{G}}(\mathfrak{s}') \tag{7.16}$$

La relación $\overset{\text{sin}}{=}$ se llama de sinonimia.

Teorema 7.8.
La relación de sinonimia es de equivalencia.

Ahora bien, como el significado de un constructo es único (pues depende de la cadena lógica de demostración) llegamos a la conclusión fundamental del trabajo:

Teorema 7.9.
Dos signos sinónimos designan el mismo constructo.

Hemos cerrado, pues, el círculo: la hipótesis intuitiva (un constructo es una clase de equivalencia de signos) es consistente con la teoría. Aclaremos, sin embargo, que el teorema que acabamos de mostrar no resuelve el problema fundamental de los objetos ideales. Hemos supuesto (y esto es una hipótesis que, tal vez, pueda confrontarse con la experiencia) que un constructo es una clase de equivalencia de procesos mentales. Esta hipótesis es mucho más profunda que la estructura lógica que estamos estudiando y queda para que la examinen los investigadores futuros.

7.5 Proposiciones

En la sección 7.4 analizamos el significado de una proposición considerándola como un constructo. En esta sección esbozaremos una construcción de la noción de proposición como una clase de equivalencia de oraciones sinónimas. Utilizaremos nociones introducidas en secciones anteriores (convenietemente modificadas) para caracterizar las nociones de significancia y sinonimia de oraciones.

7.5.1 Denotación de una oración

En la sección 6.5.1 introdujimos la noción de referencia de un constructo. Luego, observamos que la denotación de la oración es la composición de la referencia con la designación (6.10). Necesitamos invertir el mecanismo e introducir directamente la función denotación $\mathbb{D}$con definiciones similares a 6.10 y 6.11.

Definición 7.18 (Denotación de predicados (oraciones)).
Sea $P \in \mathbb{P}$ un predicado-oración (es decir, un *esquema de oración* con variables) con dominio $\prod_i \Omega_i$. Entonces, la *función de denotación para predicados*:

$$\mathbb{D}_p : \mathbb{P} \to \mathcal{P}\left(\bigcup_i \Omega_i\right)$$

es tal que:

$$\mathbb{D}_p(P) = \bigcup_i \Omega_i \tag{7.17}$$

Definición 7.19 (Denotación).
Sea una teoría $\mathcal{T}$ provista de una familia de predicados atómicos P_i, con dominios $\prod_i \Omega_i$; y sea S el conjunto de los enunciados formados con ellos. La función:

$$\mathbb{D} : S \to \mathcal{P}\left(\bigcup_i \Omega_i\right)$$

llamada *función de Denotación*, satisface las condiciones:

1. Si $s \in S$ es una constante c o una variable x:
$$\begin{aligned} \mathbb{D}(c) &= c \\ \mathbb{D}(x) &= x \end{aligned} \tag{7.18}$$

2. Si s es $\tau x P(x)$,
$$\mathbb{D}[\tau x P(x)] = \mathbb{D}_p\,(P) \tag{7.19}$$

3. Si $s \in S$ es una oración atómica P_i, formada reemplazando los parámetros del predicado por términos t_i:
$$\mathbb{D}[P(t_1, \ldots t_n)] = \bigcup_i \mathbb{D}(t_i) \tag{7.20}$$

4. Si s es una proposición compuesta, combinando proposiciones atómicas s_i a través de los operadores lógicos:
$$\mathbb{D}(s) = \bigcup_i \mathbb{D}(s_i) \tag{7.21}$$

Estas definiciones están calcadas de las de referencia y la discusión es muy similar a la de la sección 6.5.1.

7.5.2 Sentido de una oración

En la sección 7.2 introdujimos la noción de sentido de una oración en un lenguaje formalizado. De hecho, ¡esa sección se escribió pensando en caracterizar proposiciones como clases de equivalencia de oraciones!

7.5.3 Significancia y sinonimia constructivas

Pasemos ahora a *construir* la noción de significancia. Nuestra definición es análoga a la de significado de un constructo:

Definición 7.20 (Significancia).
Sea un contexto $\mathbb{C}$. La función:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{G}} : S \to \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(D)$$

con valores dados por:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{G}}(s) = \langle \mathbb{S}(s), \mathbb{D}(s) \rangle$$

se llama *función de significancia* del contexto. Su valor para una oración c se llama la *significancia de* c.

Podemos generalizar la noción de significancia a cualquier signo $\mathfrak{s} \in \Sigma$ de un contexto, asignando sentido nulo a los términos y predicados. Ahora definimos sinonimia exactamente de la misma forma que antes:

Definición 7.21 (Sinónimos).
Dos signos $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}' \in \mathcal{L}$ son sinónimos si tienen la misma significancia:

$$\mathfrak{s} \overset{\text{sin}}{=} \mathfrak{s}' \overset{\text{def}}{=} \mathcal{S}_{\mathcal{G}}(\mathfrak{s}) = \mathcal{S}_{\mathcal{G}}(\mathfrak{s}') \tag{7.22}$$

La relación $\overset{\text{sin}}{=}$ se llama de sinonimia.

y se sigue de inmediato que la relación de sinonimia es de equivalencia.

Como resultado de esta definición, dos constantes de una teoría son sinónimas si denotan el mismo objeto y por lo tanto "Venus", "Fósforo" y "Véspero" son sinónimas. De la misma manera, dos predicados son sinónimos si representan la misma propiedad de los mismos objetos.

7.5.4 Constructos

Por fin estamos en condiciones de definir proposiciones (constructos, en general) como clases de equivalencia de oraciones sinónimas.

Definición 7.22 (Constructo).
Sea $\mathbb{C}$ un contexto cerrado, Σ la clase de `FBF`'s de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{S}_{\mathcal{IN}}$ la relación de sinonimia sobre $\mathbb{C}$. Definimos la clase de constructos C de un contexto $\mathbb{C}$ como la clase cociente:

$$C = \Sigma / \overset{\text{sin}}{=}$$

Finalmente, llamaremos *proposición* a los constructos con sentido no nulo:

Definición 7.23 (Proposicion).
Un constructo se llama proposición si su sentido (el de la clase de equivalencia) es no nulo.

Hemos obtenido, de esta manera, la noción de constructo y de proposición como una clase de equivalencia de `FBF`'s sinónimas. Desde el punto de vista de una ontología realista, lo que hemos construido es un modelo de las clases de equivalencia de procesos mentales que constituyen, hipotéticamente, la noción de constructo. Si esta noción es adecuada, como teoría de caja negra, debe decidirlo la observación.

Parte III

Ontología

Capítulo 8

Cosas

La ontología o metafísica es la parte de la filosofía que responde a la pregunta "¿Qué hay?" Y Quine ha observado que la respuesta es trivial: "De todo". Sin embargo, la tarea de la ontología no es trivial: le corresponde analizar numerosos conceptos que se utilizan continuamente en ciencia: ley natural, estado de un sistema, cambio y transformación y la naturaleza del espacio-tiempo.

Ya hemos mencionado que en la filosofía que exponemos, existe una distinción nítida entre *objetos ideales* (que son ficticios) y *objetos materiales*, que son reales. La lógica y la teoría de conjuntos describen correctamente a los primeros, considerándolos como proposiciones o conjuntos. En ambos casos, se trata de *constructos* que, como hemos visto, representan clases de equivalencia de procesos mentales. Para describir los objetos reales, por otra parte, se necesita una teoría ontológica adecuada.

La teoría ontológica que vamos a exponer se basa sobre la de Bunge, expuesta en las referencias [22, 23].

8.1 Individuos y propiedades

El concepto de cosa que vamos a introducir es muy amplio: incluye partículas elementales, átomos, moléculas, objetos sólidos, porciones de fluidos, muestras de sustancias químicas, bacterias, plantas, animales, ambientes ecológicos, seres humanos y sociedades científicas. Dada una cosa, conviene distinguir entre el *individuo* x, que identifica la cosa, y sus *propiedades*. Así, por ejemplo, distinguiremos entre el electrón a y su carga e_a o su spin s_z^a[1].

8.1.1 Axiomas de existencia y denotación

Para desarrollar una ontología de las cosas materiales, consideremos un contexto $\mathbb{C} = \langle S, \mathbb{P}, D\rangle$. Sea ahora $\Theta \subset D$ un subconjunto del universo de discurso, que asociaremos con las cosas reales, $\mathsf{P} \subset D$, las *propiedades* de las cosas y $\mathbb{A} \subset \mathbb{P}$ un subconjunto de predicados, que llamaremos los *atributos* de las cosas. Entre las propiedades, hay un grupo distinguido de ellas, por su generalidad e importancia, que designaremos como $\gtrdot, \bigstar, \oplus$ y $\otimes$. Finalmente, designaremos el conjunto de los individuos con S, y dos individuos especiales con $\blacksquare$ y $\square$. Estos símbolos forman, pues, nuestra base primitiva:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{C}} = \langle \Theta, \mathsf{P}, \mathbb{A}, \mathsf{S}, \gtrdot, \bigstar, \oplus, \otimes, \blacksquare, \square\rangle \tag{8.1}$$

[1] Esta distinción es un refinamiento de la que Aristóteles establecía entre *sustancia* y *forma*. [124]

Comenzaremos nuestra teoría ontológica enunciando algunos axiomas:

Axioma 8.1 (Existencia e interpretación).

$$\Theta \neq \varnothing$$
$$(\forall x)_\Theta(x \textit{ denota una cosa real})$$

Axioma 8.2 (Individuo sustancial).

$$\mathsf{S} \neq \varnothing$$
$$(\forall x)_\mathsf{S}(x \textit{ denota el individuo asociado a una cosa})$$

Por lo general, denotaremos una cosa a través del individuo que la caracteriza. Sea x una cosa (individuo) y sea $P(x) \in \mathcal{P}(\mathsf{P})$ el conjunto de sus propiedades. Cuando tengamos que distinguir entre el individuo y la cosa, usaremos una notación adecuada para hacerlo. En el contexto en que estamos trabajando representaremos la asociación de propiedades con un individuo a través de proposiciones, llamadas atributos, del conjunto $\mathbb{A}$. Nuestro siguiente axioma se refiere a las propiedades:

Axioma 8.3 (Existencia de propiedades).

$$\mathsf{P} \neq \varnothing$$
$$(\forall P)_\mathsf{P}(\exists x)_\mathsf{S}(x \gtrdot P)$$
$$(\forall P)_\mathsf{P}(P \textit{ representa una propiedad de alguna cosa})$$

Nuevamente, nuestra noción de propiedad es sumamente general. He aquí algunos ejemplos de cosas y sus propiedades.

Ejemplo 8.1 (Partícula elemental).
Una partícula elemental está caracterizada por su masa m, su helicidad h, su carga Q y otros números cuánticos similares, además de su posición x^μ y su impulso p^μ con respecto de un sistema de referencia dado K.

Ejemplo 8.2 (Molécula).
Propiedades típicas de una molécula son su energía interna E_i, orientación e impulso angular respecto de un sistema de referencia K, grado de ionización, reactividad química.

Ejemplo 8.3 (Animal).
Los animales son seres vivos metazoos (multicelulares), móviles y heterotrofos (se alimentan de otros seres vivos). Otras propiedades importantes son la estructura del aparato digestivo, el medio de locomoción, el sexo y su capacidad sensorial.

Axioma 8.4 (Atributos).
Una propiedad P se representa a través de uno o más atributos $A \in \mathbb{A}$:

$$A : \mathsf{S} \times B \times C \ldots \to S \tag{8.2}$$

en donde $B, C \ldots$ son conjuntos arbitrarios, no vacíos, que pueden ser iguales a S.

Debemos distinguir cuidadosamente entre el atributo, que representa una propiedad, y la propiedad misma. En particular, un individuo x *posee* una propiedad $P(x)$,

$$x \gtrdot P$$

independientmente de que exista un atributo $A[x, P(x)]$ que represente dicha propiedad.

Definición 8.1 (Propiedad sustancial).
Una propiedad P se llama *sustancial* si existe un individuo sustancial que la posee:

$$(\exists x)_{\mathsf{S}}(x \gg P)$$

Los axiomas 8.1, 8.2 y 8.3 afirman en conjunto la existencia de individuos provistos de propiedades sustanciales; es decir de cosas. los axiomas anteriores, sin embargo no aclaran si una cosa puede poseer una propiedad "a medias". Por lo tanto, postulamos:

Axioma 8.5 (Aristóteles).

$$(x \gg P) \vee \neg(x \gg P)$$

8.1.2 Una clasificación de las propiedades

Estamos ahora en condiciones de introducir una clasificación importante de las propiedades.

Definición 8.2.
Diremos que una propiedad P es *intrínseca* si sus atributos dependen de un único individuo. En caso contrario, la propiedad se llama *relacional.*

Ejemplo 8.4.
La carga eléctrica, la masa en reposo y el spin son propiedades intrínsecas de las partículas elementales. El impulso y el impulso angular total de un cuerpo son propiedades relacionales, pues dependen de un segundo cuerpo físico: el sistema de referencia.

Ejemplo 8.5.
La densidad y el índice de refracción son propiedades intrínsecas de una porción de un compuesto químico, mientras que su solubilidad y su reactividad son propiedades relacionales.

Ejemplo 8.6.
La edad y el sexo son propiedades intrínsecas de un ser vivo, mientras que el apareamiento o su posición en la cadena trófica son propiedades relacionales.

Destaquemos que la distinción entre propiedades intrínsecas y relacionales depende únicamente del número mínimo de individuos sustanciales que aparecen en los atributos.

Definición 8.3 (Propiedades primarias y secundarias).
Una propiedad relacional se llama *secundaria* si relacionan una cosa con las precepciones de un ser vivo. Se llama *primaria* en caso contrario.

Las propiedades secundarias son importantes en epistemología, pues todo conocimento se obtiene a través de los sentidos, pero no tienen importancia en ciencia, que se ocupa exclusivamente de las propiedades primarias. También juegan un papel esencial en la tecnología, pues el diseño y la elaboración de productos deben tenerlas en cuenta [83, p. 138]:

> *¡Qué alma tan grácil la del vino!*
> *Alfareros: ¡modelad para esa alma delicada cántaros de paredes tersas!*
> *Cinceladores de cálices: ¡redondeadles con primor para que esa alma voluptuosa*
> *pueda acariciarse en el azul turquí de su cristal!*

Puesto que estamos fundamentalmente en la ciencia básica, nos limitaremos desde ahora en adelante a las propiedades primarias de las cosas.

8.1.3 Propiedades unarizadas

Tratemos ahora de definir la noción de *propiedades de una cosa.* Exista, para hacerlo, la dificultad de que muchas propiedades importantes son relacionales. Por ejemplo, el estado de una partícula clásica a está definido por su posición $\mathbf{r}$ y su impulso $\mathbf{p}$ respecto de un sistema de referencia prefijado K. Aunque estas propiedades sean relacionales, podemos considerarlas propiedades intrínsecas con respecto de un sistema de referencia *fijo.* Este procedimiento de fijar el resto del universo de discurso es común en ciencia: una vez elegido un sistema de referencia, éste se utiliza tácitamente, hasta que la necesidad obligue a cambiarlo. Llamaremos a este proceso *unarización.* Formalmente, prodemos definir una propiedad unarizada como una función de la cosa x, dependiente de un conjunto de parámetros $y, z \ldots$ de la siguiente manera:

Definición 8.4 (Propiedad unarizada).
Dada una propiedad $P \in \mathsf{P}$ definida a través de un atributo $A \in \mathbb{A}$, la función $P : \Theta \to \mathsf{P}$ tal que:

$$P_{y,z\ldots}(x) = \tau_P A(P, x, y, z \ldots)$$

Una propiedad unarizada, pues, es una función que a cada cosa le asigna una propiedad, dependiendo de un conjunto de parámetros, algunos de los cuales pueden ser otras cosas. Desde ahora en adelante, suprimiremos la mención explícita de los parámetros de la función P.

Axioma 8.6 (Representación de cosas).
Una cosa X se representa por el par ordenado $\langle x, P(x)\rangle$.

Por lo general, una cosa tiene muchas propiedades y $P(x)$ va a ser un objeto de muchas componentes, cada una de las cuales representa una propiedad sustancial de la cosa x. Es necesario distinguir entre las *propiedades generales*, tales como la densidad o el índice de refracción de un cuerpo y sus valores particulares $n = 1.54$, $\rho = 2.17\,\mathrm{g/cm^3}$. El siguiente axioma tiene un gran valor metodológico, pues promete la posibilidad de estudiar exhaustivamente la naturaleza:

Axioma 8.7 (Cardinalidad).
El conjunto de propiedades generales es finito.

Sin embargo, el número de propiedades generales es sumamente grande, lo que garantiza trabajo a los científicos durante muchísimo tiempo.

Nuestro siguiente axioma es una adpatación del principio de Leibnitz a la ontología (cf. Secc. 3.1):

Axioma 8.8 (Principio de individuación).
Dos cosas distintas tienen distintas propiedades:

$$(\forall x, y)_\Theta (x \neq y \Rightarrow P(x) \neq P(y))$$

Teorema 8.1.

$$P(x) = P(y) \Rightarrow x = y$$

Si bien el conjunto de sus propiedades identifica una cosa, una propiedad dada puede ser compartida por otras cosas. Por ejemplo, todos los electrones comparten la masa y el spin, aunque sus impulsos o sus helicidades sean diferentes.

Definición 8.5 (Alcance de una propiedad).
Se llama *alcance (scope)* de una propiedad P al conjunto de cosas que la poseen:

$$\mathcal{S}(P) = \{x | x \gtrdot P\}$$

Ejemplo 8.7 (Energía).
El alcance de la energía es Θ, pues la energía es una propiedad universal.

Ejemplo 8.8 (Temperatura).
El alcance de la temperatura es el conjunto de cuerpos macroscópicos.

Ejemplo 8.9 (Sexo).
El alcance del sexo es el conjunto de los eucariotas.

La noción de alcance es fundamental en la presente ontología. Como veremos, las nociones de ley natural y de clasificación natural se pueden elucidar sobre la base del alcance.

8.1.4 Modelos de cosa

Por lo general, la ciencia no trabaja con el concepto abstracto de cosa que hemos introducido. Por el contrario, un científico típico introduce simplificaciones importantes en la descripción de una cosa. Estos *modelos de cosa* son las herramientas de trabajo fundamentales en ciencia.

Definición 8.6 (Esquema funcional).
Un *esquema funcional* X_F de una cosa $X = \langle x, P(x) \rangle$ es el par ordenado $X_F = \langle M, \mathbb{F} \rangle$ en donde M es un conjunto arbitrario y $\mathbb{F} = \{F_i | F_i : M \to V, i \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto arbitrario de funciones de dominio P y rango en un espacio auxiliar V.

Ejemplo 8.10.
Un modelo de una partícula clásica se obtiene eligiendo $M = K \times T$ (con K el conjunto de sistemas de referencia y T el tiempo) y $\mathbb{F} = \langle \mu, \xi, \pi, \phi \rangle$, en donde

$$\mu(k,t) \stackrel{\wedge}{\Rightarrow} \text{masa}$$
$$\xi(k,t) \stackrel{\wedge}{\Rightarrow} \text{posición}$$
$$\pi(k,t) \stackrel{\wedge}{\Rightarrow} \text{impulso}$$
$$\phi(k,t) \stackrel{\wedge}{\Rightarrow} \text{fuerza}$$

como funciones del sistema de referencia k y del tiempo t.

Los esquemas funcionales proporcionan un modelo muy general de cosa:

Axioma 8.9.
Toda cosa puede modelarse con un esquema funcional.

$$(\forall X)_\Theta (\exists X_F)_C (X_F \stackrel{\wedge}{\Rightarrow} X)$$

Existen muchas maneras de modelar una cosa, algunas de ellas sorprendentemente sencillas. Así, en Mecánica Celeste la Tierra puede modelarse como un punto masa, en la teoría de la radiación un átomo puede modelarse como un sistema de dos niveles y en genética un ser vivo puede modelarse como un conjunto muy pequeño de genes. Los modelos fieles de cosas son muy escasos, tal vez inexistentes, pero introduciremos la ficción de que existen modelos fieles para cada cosa. Esto nos permitirá trabajar con las cosas usando el lenguaje de los modelos funcionales, que es muy natural en la ciencia. Por otra parte, aunque un modelo describa correctamente una cosa es esencial mantener la distinción entre cosa y modelo, pues la confusión entre ambas es el origen de la magia negra y otras supersticiones: la curandera que picha con alfileres el retrato de su enemigo está cometiendo esa confusión.

El rango de la función $\mathbb{F}$ depende de la propiedad de que se trate. Puede tratarse de un número real (con dimensiones dadas), de un conjunto discreto (tal vez infinito) de números reales o de conjuntos más complicados.

Ejemplo 8.11.
La posición e impulso de una partícula clásica se representan con vectores: ternas de números reales.

Ejemplo 8.12.
La carga eléctrica de un átomo o molécula, así como sus niveles de energía se representan con conjuntos discretos de números reales.

Ejemplo 8.13.
El sexo, color de ojos, grupos sanguíneos, se representan como elementos de conjuntos finitos:

$$\{\text{Macho, Hembra}\}$$
$$\{\text{Marrones, Azules}\}$$
$$\{O, A, B, AB\}$$

Pasemos ahora a definir una de las nociones fundamentales de nuestra ontología: la noción de *estado* de una cosa. Intuitivamente, el estado de una cosa es el conjunto de las propiedades que ésta tiene en un instante dado. Sin embargo, las propiedades unarizadas muchas veces no están dadas como elementos de la base primitiva de la teoría. En su lugar, pueden utilizarse un conjunto V_i de variables auxiliares, tales que las propiedades $P_i = \mathbb{F}_i(V_j)$.

Definición 8.7 (Espacio de estados).
$V = \prod_i V_i$ se llama el *espacio de estados* de la cosa.

Definición 8.8.
Un *estado* de una cosa es un punto del espacio de estados.

Ejemplo 8.14 (Mecánica Cuántica).
El estado de un sistema cuántico σ se representa con un vector en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$:

$$|\Psi(\sigma)\rangle \in \mathcal{H} \overset{\wedge}{\Rightarrow} \text{ estado de } \sigma$$

Ejemplo 8.15 (Sistema de dos niveles).
El modelo más sencillo de un átomo es el *sistema de dos niveles*, descripto por el vector de estado:

$$|\Psi(\sigma)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

Finalmente, estamos en condiciones de caracterizar un objeto material (o cosa) y un objeto real. Para hacerlo, observemos que un objeto ideal (tal como una proposición o un triángulo geométrico) son objetos *invariables*: su estado es único o (si se lo prefiere así) su espacio de estados se reduce a un único punto.

Definición 8.9.
Un objeto se llama *material* si su espacio de estados contiene al menos dos puntos.

El siguiente axioma tiene gran importancia, pues es la base de la posición filosófica llamada *realismo crítico* o también *materialismo científico*:

Axioma 8.10 (Materialismo científico).
Un objeto es real *si y sólo si es material.*

De este modo, objetos tales como las mesas (ejemplos favoritos de los filósofos), los campos electromagnéticos, las partículas elementales, los mecheros Bunsen, los paramecios o los bosques son reales, mientras que las proposiciones, los triángulos, las distribuciones, Pegaso y los fantasmas son ficticios. Por otra parte, ningún objeto puede ser real y ficticio a la vez:

Axioma 8.11.
Sea C el conjunto de los objetos conceptuales (ficticios). Entonces:

$$C \cap \Theta = \varnothing$$

8.2 Asociación

El estudio científico de la naturaleza muestra una estructura jerárquica en las cosas: cosas más complejas están formadas por otras más simples. Así, los átomos están formados por partículas elementales, las moléculas por átomos, los cuerpos macroscópicos por moléculas. En los seres vivos esta estructura se repite: los metazoos están formados por células, que forman tejidos que se estructuran en órganos, y los seres vivos se agrupan en una jerarquía de comunidades ecológicas. Diremos que esta estructura está formada por asociación de cosas.

Las propiedades de asociación son fundamentales para describir a la naturaleza. Existe una rica variedad de formas de asociación, que van desde las interacciones moleculares a la compleja estructura familiar de los insectos y mamíferos. En esta sección desarrollaremos un modelo muy sencillo de asociación, que abstrae las características más importantes de las formas más complejas.

8.2.1 Axiomas de asociación

Distinguiremos dos formas básicas de asociación: *yuxtaposición* y *superposición* de cosas. Intuitivamente, dos cosas están yuxtapuestas si ocupan lugares distintos mientras que dos cosas superpuestas comparten el mismo lugar. Sin embargo, en nuestra formulación no hay nociones espaciotemporales; por el contrario, construiremos la teoría del espaciotiempo a partir de nociones ontológicas fundamentales.

Ejemplo 8.16 (Caída de los cuerpos).
Un cuerpo cualquiera está superpuesto al campo gravitacional de la tierra.

Ejemplo 8.17 (Sistema solar).
El Sol y los planetas están yuxtapuestos para formar el sistema solar. Además, están superpuestos con el campo gravitacional.

Ejemplo 8.18 (Café con leche).
En un *Café con leche* la superposición del café y la leche está yuxtapuesta con la taza.

Representaremos las propiedades de asociación por dos operaciones binarias, $\oplus$ y $\otimes$, y una operación unaria $\bigstar$ sobre el conjunto de cosas Θ, que satisfacen los axiomas siguientes:

Axioma 8.12 (Estructura booleana).
Las funciones $\oplus, \otimes, \bigstar$ satisfacen un álgebra de Boole sobre Θ.

En el reticulado que postulamos, $\oplus$ juega el papel de cota superior mínima $\curlyvee$, $\otimes$ el de $\curlywedge$ y $\bigstar$ el de complemento $'$.

Axioma 8.13 (Interpretación).

$$a \oplus b \stackrel{\wedge}{\Rightarrow} \textit{ la yuxtaposición de } a \textit{ y } b.$$

$$a \otimes b \stackrel{\wedge}{\Rightarrow} \textit{ la superposición de } a \textit{ y } b.$$

$$\bigstar a \stackrel{\wedge}{\Rightarrow} \textit{ el entorno físico de } a.$$

Ejemplo 8.19 (Sistema solar).
Sean S el sol, P_i los planetas y $\boldsymbol{g}$ el campo gravitacional. Entonces, el sistema solar se puede caracterizar como

$$S_S = [S \oplus (\bigoplus_i P_i)] \otimes \boldsymbol{g}$$

Ejemplo 8.20 (Café con leche).
Un Café con leche se puede describir en la forma:

$$\text{Café con leche} = \text{taza} \oplus (\text{café} \otimes \text{leche})$$

Por el axioma 8.12 y la definición de álgebra de Boole, sabemos que existen dos cotas universales al reticulado, que designaremos por $\blacksquare$ y $\square$.

Axioma 8.14 (El mundo y la nada).

$$\blacksquare \ \textit{denota el} \text{ mundo}$$
$$\square \ \textit{denota la} \text{ nada}$$

Es necesario distinguir cuidadosamente entre el conjunto de todas las cosas Θ (que es un constructo, un objeto ficticio) y el mundo $\blacksquare$, que es un objeto físico.

De la misma manera, es necesario distinguir el conjunto vacío $\varnothing$ de la nada $\square$. De acuerdo con la definición 8.9 la nada es un objeto ideal, una ficción. Sin embargo, es distinta del conjunto vacío: tiene propiedades de asociación que, como veremos, son importantes para la pregeometría.

Ahora podemos definir algunos conceptos pregeométricos muy sencillos a partir de nuestras operaciones básicas:

Definición 8.10 (Conceptos pregeométricos básicos).
Dos cosas están *separadas* si no se superponen:

$$a \wr b \stackrel{\text{def}}{=} a \otimes b = \square$$

Dos cosas están unidas si no están separadas:

$$a \uplus b \stackrel{\text{def}}{=} a \otimes b \neq \square$$

Ahora podemos definir con generalidad la noción de ensamble.

Definición 8.11 (Ensamble).
Si $\Sigma \subset \Theta$ entonces:

1. el *ensamble aditivo* de Σ es

$$[\Sigma] = \sup \Sigma$$

2. el *ensamble multiplicativo* es

$$(\Sigma) = \inf \Sigma$$

Las cantidades $[\Sigma]$ y (Σ) existen siempre, por el axioma 8.12. En particular, si x e y son dos cosas:

$$[\{x, y\}] = x \oplus y \tag{8.3}$$
$$(\{x, y\}) = x \otimes y \tag{8.4}$$

Con las definiciones anteriores, podemos elucidar la naturaleza del mundo y de la nada:

Teorema 8.2 (Naturaleza del mundo).
El mundo es la yuxtaposición de todas las cosas:

$$\blacksquare = [\Theta]$$

El teorema dual de 8.2 es:

Teorema 8.3 (Naturaleza de la nada).
La nada es la superposición de todas las cosas:

$$\square = (\Theta)$$

8.2.2 Algunas consecuencias

La teoría de asociación aquí expuesta tiene varias consecuencias importantes, que reflejan la bella estructura booleana que hemos supuesto para el mundo.

Teorema 8.4.
Las cosas son idempotentes repecto de la asociación:

$$a \oplus a = a$$
$$a \otimes a = a$$

Ejemplo 8.21 (Café con leche).
La idempotencia de las operaciones ontológicas básicas lleva a algunas simplificaciones sorprendentes. Por ejemplo, un café con leche puede describirse de dos maneras equivalentes:

$$\begin{aligned}\text{Café-con-leche} &= \text{taza} \oplus (\text{café} \otimes \text{leche}) \\ &= (\text{taza} \oplus \text{café}) \otimes (\text{taza} \oplus \text{leche})\end{aligned}$$

La noción de *parte física (u ontológica)* de una cosa se introduce observando que las partes no añaden al todo:

Definición 8.12 (Parte física).
$x \in \Theta$ es una parte física de y :

$$x \sqsubseteq y \stackrel{\text{def}}{=} x \oplus y = y$$

La noción de parte física (que a veces llamaremos *subcosa*) refleja el orden parcial sobre Θ descripto por el álgebra de Boole. La noción de partes sirve para elucidar la de composición de una cosa:

Definición 8.13 (Composicion).
La *composición* de una cosa x es el conjunto de sus partes físicas:

$$\mathcal{C}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{z | z \sqsubseteq x\}$$

La composición de una cosa no debe confundirse con su ensamble. La primera es un constructo: la lista de las partes componentes. Sólo la segunda representa un objeto físico: la construcción del mismo. Vale, sin embargo:

Teorema 8.5.
Toda cosa es el ensamble aditivo de sus partes:

$$x = [\mathcal{C}(x)]$$

Como corolario, obtenemos otra demostración del teorema 8.2. Otra importante consecuencia de la teoría es:

Teorema 8.6 (Unicidad del mundo).
Hay un único mundo.

Demostración. Todos los supremos son únicos. □

Como consecuencia, la interpretación de los muchos mundos de la Mecánica Cuántica [79] es inconsistente con esta ontología. También lo son las "metafísicas de los mundos posibles" (empezando con la de Leibnitz, maravillosamente satirizada por Voltaire) y la teoría de Popper de los "Tres Mundos" [25].

Es posible desarrollar la teoría de conjuntos basándose en un único individuo: el conjunto vacío $\varnothing$. Esto es imposible en nuestra ontología, cuya esturctura booleana es mucho más rica que la de la clase universal. Probaremos ahora que nuestra ontología satiface el *Principio de Epicuro* [93, I,150,215]:

> De ello surge, para nosotros, un primer principio: que ninguna cosa, ni aun por operación divina, se engendra en la nada.
>
> Agrega que la naturaleza disuelve de nuevo cada cosa ... pero no las aniquila.

En esta formulación, el principio de Epicuro toma la siguiente forma:

Teorema 8.7 (Principio de Epicuro).
Si x, y son cosas diferentes de la nada:

$$x \oplus y \neq \Box$$
$$x \otimes y = \Box \Rightarrow x \wr y$$
$$[\Box] = \Box$$
$$(\Box) = \Box$$

Así, pues, la naturaleza no puede construirse a partir de la nada y otras teorías filosóficas (como el existencialismo) son incompatibles con esta ontología. Para describir las piezas fundamentales de la naturaleza, adoptaremos la noción de *cosa básica*.

Definición 8.14 (Parte propia).
Una *parte propia* de una cosa x es una parte no nula diferente de x.

Definición 8.15 (Cosas básicas).
Una cosa es básica si no tiene partes propias.

El siguiente axioma, que tiene su origen en los atomistas griegos [124, 97], es fundamental en la ciencia moderna: toda cosa está compuesta de un conjunto de cosas básicas:

Axioma 8.15 (Existencia de cosas básicas).
Existe un subconjunto $\mathcal{B} \subset \Theta$ tal que

$$(\forall x)_\Theta (\exists B_x)(B_x \subset \mathcal{B} \wedge x = [B_x])$$

No corresponde a la filosofía determinar cuáles son las cosas básicas. La física contemporánea sugiere que éstas son un conjunto de campos fermiónicos (leptones y quarks) junto con un conjunto de bosones intermediarios.

8.2.3 Asociación y propiedades

El comportamiento de las propiedades bajo asociación no es simple. De hecho, la asociación de cosas introduce propiedades nuevas, que no poseían las partes. En general vale:

$$\begin{aligned} z &= x \oplus y \\ P(z) &\neq P(x) \cup P(y) \end{aligned} \tag{8.5}$$

Un ejemplo importante de propiedad nueva es la de z de estar formado por x e y, que las partes individuales no poseen. Como consecuencia, las propiedades del mundo no son la unión de las propiedades de sus partes físicas.

Teorema 8.8.

$$P(\blacksquare) = P([\Theta]) \neq \bigcup_{x \in \Theta} P(x)$$

De acuerdo con lo anterior, las propiedades de una asociación pueden pertenecer a dos tipos:

Definición 8.16 (Propiedades hereditarias y emergentes).
Sea z una cosa compuesta aditivamente de un conjunto de cosas X: $z = [X]$. Diremos que P es una *propiedad hereditaria (o resultante)* si existe una parte propia de x que la posee.

Una propiedad de z se llama *propiedad emergente* si no es hereditaria.

Ejemplo 8.22 (Carga eléctrica).
La carga eléctrica de un cuerpo es una propiedad hereditaria.

Ejemplo 8.23 (Valencia).
La valencia es una propiedad emergente de átomos y moléculas: electones y núcleos aislados no tienen valencia.

Ejemplo 8.24 (Energía interna y temperatura).
La energía interna es una propiedad hereditaria de un gas, mientras que la temperatura es una propiedad emergente.

Ejemplo 8.25 (Masa y sexo de un ser vivo).
La masa de un ser vivo es una propiedad hereditaria, mientras que el sexo es emergente.

Podemos resumir estos ejemplos con el axioma siguiente:

Axioma 8.16 (Existencia de propiedades emergentes).
Toda cosa compuesta tiene propiedades emergentes.

En la próxima sección enunciaremos una forma más completa del axioma anterior.

8.3 Ley y Orden

Desde el punto de vista del científico, las propiedades más interesantes de una cosa son aquellas que permiten conocer su estructura, su comportamiento y su relación con otras cosas materiales. Estas propiedades describen leyes naturales y establecen una estructura de orden sobre el mundo.

8.3.1 Ley como restricción de los alcances

Vamos a definir la noción de *enunciado de ley*: la reconstrucción conceptual de estructuras objetivas definidas por propiedades de cosas. Nuestras herramientas fundamentales serán la noción de alcance de una cosa (Def. 8.5) y la de esquema funcional (Def. 8.6).

Definición 8.17 (Enunciado de ley).
Si $P, Q \in \mathsf{P}$ son propiedades sustanciales, la proposición

$$\mathcal{S}(P) \subset \mathcal{S}(Q)$$

se llama *enunciado de ley* que relaciona P y Q. Las dos propiedades están *conectadas legalmente*.

La definición anterior es abstracta, pero tiene la ventaja de no hacer intervenir la noción de modelo de cosa. Por abuso de lenguaje, hablaremos de una ley en lugar de enunciado de ley.

Ejemplo 8.26 (Partículas elementales).
Los electrones son las únicas partículas elementales de spin $\frac{1}{2}$ con masa igual a m_e.

Ejemplo 8.27 (Mamíferos).
Los mamíferos son los únicos vertebrados con dentadura diferenciada en incisivos, caninos y molares.

El axioma que sigue es la base de toda la ciencia y la tecnología:

Axioma 8.17 (Principio de legalidad).
Toda propiedad sustancial está conectada legalmente con otra propiedad sustancial:

$$(\forall P)_{\mathsf{P}}(\exists Q)_{\mathsf{P}}(\mathcal{S}(P) \subset \mathcal{S}(Q) \vee \mathcal{S}(Q) \subset \mathcal{S}(P))$$

El principio de legalidad garantiza que la ciencia es coherente: no existen temas de investigación aislados de los demás ni hay tampoco propiedades separadas de las cosas naturales.

Ejemplo 8.28 ("Verdul").
El predicado "Verdul"[2]:

$$\ulcorner \text{Verde antes de 2000 DC y azul después} \urcorner$$

no figura en ningún enunciado de ley y no representa, por lo tanto, una propiedad sustancial.

La definición 8.17 sugiere introducir la siguiente relación de precedencia entre propiedades:

Definición 8.18 (Precedencia de propiedades).
La propiedad P *precede* a Q si el alcance de P incluye al de Q:

$$P \preccurlyeq Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(Q) \subset \mathcal{S}(P)$$

La propiedad P, pues, es más general que la propiedad Q y la precedencia es equivalente a que exista un enunciado de ley que conecte ambas propiedades. La relación de precedencia tiene un profundo significado ontológico, pues implica que la mayor o menor generalidad de una propiedad es una ley natural. Con la relación de precedencia podemos enunciar un axioma profundo sobre las propiedades emergentes:

[2] "Grue", en inglés.

Axioma 8.18 (Precedencia de propiedades emergentes).
Toda propiedad emergente tiene propiedades que la preceden.

El axioma anterior implica que las propiedades emergentes no surgen de la nada. Por ejemplo, la valencia puede analizarse como consecuencia de la deformabilidad de las nubes electrónicas (matriz densidad de carga de un cuerpo) de un átomo que es una propiedad que la precede; la temperatura como la energía cinética promedio de las moléculas del gas y el sexo como la existencia de genes específicos (secciones de la molécula de ácido desoxirribonucleico). Y, trivialmente, este análisis formula en cada caso una ley natural.

8.3.2 Orden natural

Intentaremos ahora elucidar la noción de *orden natural*: el que establecen las propiedades sobre el conjunto de cosas Θ. La relación $\preccurlyeq$ es reflexiva y transitiva pero no antisimétrica pues $(P \preccurlyeq Q) \wedge (Q \preccurlyeq P) \not\Rightarrow P = Q$, ya que dos propiedades pueden tener el mismo alcance y no ser idénticas. Por ejemplo, las propiedades

$$\begin{aligned} &\ulcorner Z = 1 \urcorner \\ &\ulcorner \text{Líneas de Balmer en el espectro visible} \urcorner \end{aligned} \tag{8.6}$$

tienen el mismo alcance, pero son diferentes. Ambas propiedades, sin embargo, están conectadas por un enunciado de ley.

Definición 8.19 (Propiedades concomitantes).
Se llaman *propiedades concomitantes* las que tienen el mismo alcance:

$$P \sim Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(P) = \mathcal{S}(Q)$$

La concomitancia de propiedades es una relación de equivalencia: dos propiedades con el mismo alcance son incapaces de distinguir entre cosas. La relación $\stackrel{\wedge}{\preccurlyeq}$ inducida es de orden sobre el conjunto cociente $\hat{\mathsf{P}} = \mathsf{P}/\sim$.

Definición 8.20 (Alcance generalizado).
La función $\hat{\mathcal{S}} : \hat{\mathsf{P}} \to \mathcal{P}(\Theta)$ es el alcance de clases de equivalencia de concomitantes:

$$\hat{\mathcal{S}}(\hat{P}) = \mathcal{S}(P)$$

El alcance generalizado es una función inyectiva y por lo tanto induce sobre su dominio $\hat{\mathsf{P}}$ las estructuras de su rango $\mathcal{P}(\Theta)$. En particular, el conjunto de las partes tiene una estructura de reticulado bajo las operaciones de unión, intersección y complemento. Así pues, a cada conjunto de cosas $T \subset \Theta$ le corresponde un conjunto de propiedades concomitantes: las que comparten las cosas de T. Con más precisión:

Definición 8.21 (Alcance inverso).
La función $\mathcal{S}^* : \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Theta)) \to \mathcal{P}(\mathsf{P})$ asigna a cada familia de conjuntos de cosas $\mathcal{X}$ las propiedades que las cosas comparten:

$$\mathcal{S}^*(\mathcal{X}) = \{P \in \mathsf{P} | \mathcal{S}(P) \in \mathcal{X}\}$$

Consideremos ahora un conjunto de cosas T y sea

$$[T) = \{X | X \subset \Theta \wedge T \subset X\} \tag{8.7}$$

es decir, el conjunto de conjuntos de cosas que incluyen a T como parte. Este conjunto es un filtro sobre el reticulado inducido sobre $\mathcal{P}(\Theta)$ por la relación de inclusión. El alcance inverso de $[T]$ es un ideal sobre el reticulado inducido por el alcance generalizado: es el ideal de las propiedades compartidas por los miembros de T:

$$\mathcal{S}^*([T]) = \{P \in \mathsf{P} | (\forall x)_\Theta (x \in T \Rightarrow x \succ P)\} \tag{8.8}$$

Con las consideraciones anteriores, podemos definir rigurosamente la noción de *clase natural*.

Definición 8.22 (Clase natural).
Se llama *clase natural definida por* P al alcance de P

Teorema 8.9.
La colección de propiedades $p(T)$ de una clase natural $T = \mathcal{S}(P)$ es el ideal principal de propiedades compartidas por los miembros de T:

$$p(T) = \{Q \in \mathsf{P} | Q \preccurlyeq P\}$$

Como consecuencia, cuanto más amplia es la gama de propiedades consideradas, tanto menor es la clase natural:

Teorema 8.10.

$$T \subset T' \Rightarrow p(T') \subset p(T)$$

En este teorema se funda el principio de clasificación de las cosas de la naturaleza. Un esquema taxonómico considera un ideal de propiedades y va agrupando las cosas en filtros definidos por el ideal de propiedades.

8.3.3 Ley como restricción del espacio de estados

Sin embargo, en la ciencia las leyes se enuncian de otra manera: como restricciones a la función de estado de una cosa. Esta segunda definición es mucho más precisa y útil que la anterior, pues pone resticciones específicas sobre las propiedades.

Definición 8.23 (Enunciado de ley).
Sea $X_F = \langle M, \mathbb{F} \rangle$ el esquema funcional de un modelo de cosa perteneciente a una teoría $\mathcal{T}$ con una clase de referencia factual $\mathcal{R} \subset \Theta$. Se llama *enunciado de ley* a cualquier teorema de $\mathcal{T}$ que implique una restricción sobre la función $\mathbb{F}$.

Ejemplo 8.29 (Oscilador armónico).
La función de estado de una partícula en movimiento unidimensional tiene la forma $\mathbb{F} = (x, p)$. El enunciado de ley que describe el oscilador armónico es la restricción:

$$\begin{aligned} x &= A \cos \omega (t - t_0) \\ p &= -m\omega A \operatorname{sen} \omega (t - t_0) \end{aligned} \tag{8.9}$$

en donde m representa la masa de la partícula, ω la frecuencia del oscilador (una propiedad emergente) y A la amplitud del movimiento (otra propiedad emergente). Por otra parte, t y t_0 son funciones reales del conjunto M:

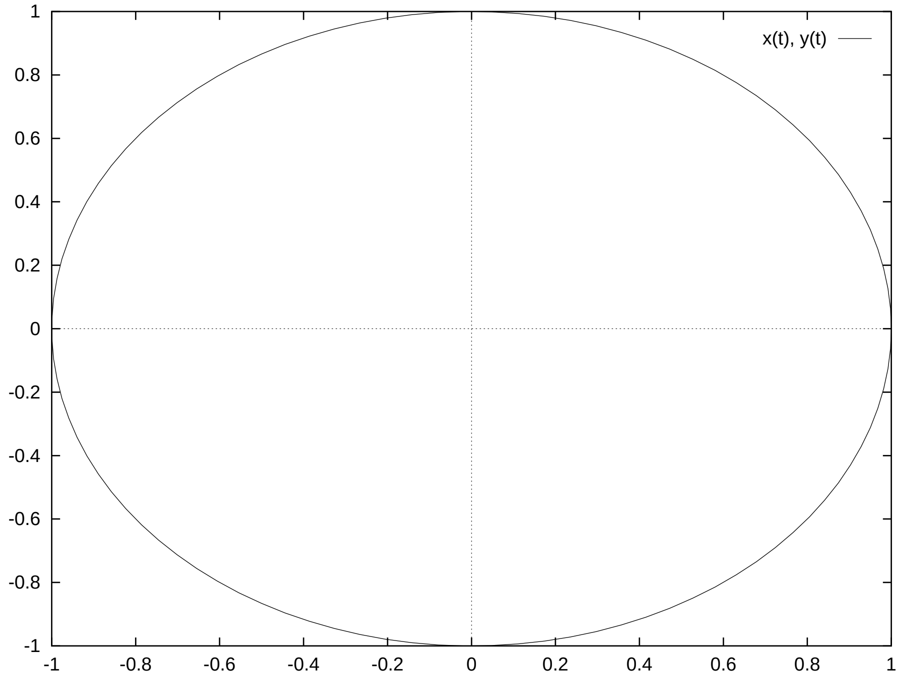
$$t : M \to \Re$$

Las variables etán restingidas a una curva (elíptica) en el espacio de estados $\mathbb{S} = \Re(x) \times \Re(p)$. La misma ley puede enunciarse en la forma de ecuación de movimiento:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega^2 x \tag{8.10}$$

con condiciones iniciales adecuadas.

Figura 8.1: Espacio de estados de un oscilador armónico. El plano X, P es el espacio de estados $\mathbb{S}$, mientras que la elipse representa el espacio de estados legales $\mathbb{S}_{\mathbb{L}}$.



Ejemplo 8.30 (Ley de Gravitación Universal).
La fuerza que actúa sobre una partícula $\mathbf{r}$ (producida por otra de masa m' en el origen) es una función $\mathbb{F} : \Re^3 \to \Re^3$. La ley 5.9 restringe las posibles funciones a la forma

$$\mathbf{F} = G_N m m' \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Ejemplo 8.31 (Ley de proporciones definidas).
La composición quícma de una sustancia binaria puede representarse por una función vectorial sobre los elementos constituyentes:

$$\mathbb{F} : \Theta \to \Re^2$$

La ley de proporciones definidas restringe el cociente de las componentes [107, 101]:

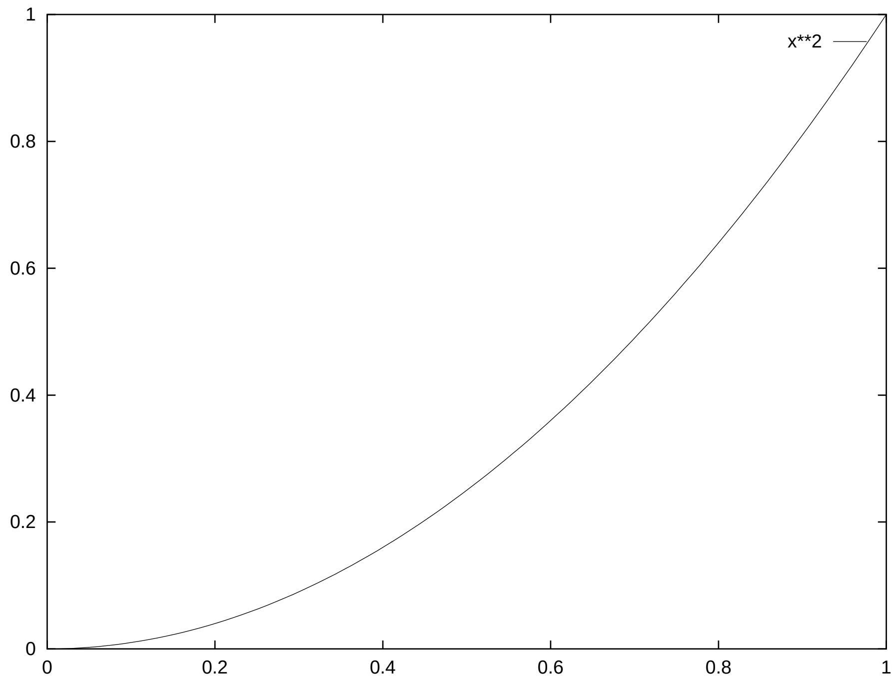
> La proporción según la cual dos cuerpos simples pueden unirse para formar un compuesto definido no es susceptible de variaciones continuas.

Ejemplo 8.32 (Leyes de Mendel).
Sea p la probabilidad de un gen dominante en una población y $q = 1 - p$ el alelo recesivo, y sea P la probabilidad del fenotipo dominante y $Q = 1 - P$ el fenotipo recesivo. Ambas probabilidades son dos componentes de la función de estado de la población. Las leyes de Mendel restringen las componentes con la ecuación:

$$Q = q^2$$

Como consecuencia de lo anterior, la función de estado $\mathbb{F}$ no tomará todos los valores posibles en $\mathbb{S}$: por el contrario, su rango estará restringido al *espacio de estados legales* $\mathbb{S}_{\mathbb{L}}$. Para definirlo con más precisión, introduciremos algunas nociones preliminares.

Figura 8.2: Espacio de estados de un población genética. El plano q, Q es el espacio de estados $\mathbb{S}$, mientras que la parábola representa el espacio de estados legales $\mathbb{S}_{\mathbb{L}}$.



Definición 8.24.
Sea $L(x) \in P(x)$ un enunciado de ley posido por la cosa $X = \langle x, P(x) \rangle$. Llamaremos $\mathbb{L}(x)$ la conjunto de las leyes poseídas por x:

$$\mathbb{L}(X) = \{L | x \gtrdot L \wedge L \text{ es una ley}\}$$

Definición 8.25.
$\mathbb{L} \subset \mathsf{P}$ es el conjunto de las leyes poseídas por todas las cosas:

$$\mathbb{L} = \bigcup_{X \in \Theta} \mathbb{L}(X)$$

Definición 8.26 (Espacio de estados legales).
Sea ahora una cosa X, representada por un esquema funcional $X_m = \langle M, \mathbb{F} \rangle$, donde la función $\mathbb{F}$tiene rango V. El *espacio de estados legales* $\mathbb{S}_{\mathbb{L}}(X)$ es el subconjunto de estados $s \in \mathbb{S}$ alcanzables por $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{S}_{\mathbb{L}}(X) = \{s \in V | \mathbb{F} \text{ satisface } \mathbb{L}(X)\}$$

Definición 8.27 (Estado legal).
Un punto de $\mathbb{S}_{\mathbb{L}}$ se llama *estado legal*.

Obviamente, el espacio de estados legales es un subconjunto del espacio de estados $\mathbb{S}_{\mathbb{L}}(X) \subset \mathbb{S}(X)$.

Ejemplo 8.33 (Oscilador armónico).
El espacio de estados legales del oscilador armónico con energía E son elipses en el plano (x, p).

Ejemplo 8.34 (Ley de las proporciones definidas).
El espacio de estados legales de un compuesto binario es una recta en el plano (m_1, m_2) de las masas del compuesto.

Ejemplo 8.35 (Leyes de Mendel).
Las leyes de Mendel restringen las probabilidades de genotipo y fenotipo a una parábola en el plano (q, Q).

8.3.4 Cosas de referencia

En física es fundamental la noción de sistema de referencia: prácticamente, no puede desarrollarse ninguna teoría física sin utilizarlo, pero lo mismo es cierto de cualquier otra ciencia.

Ejemplo 8.36 (Cantidades molares).
Es común referir las cantidades de una sustancia química a un cuerpo que contenga un mol de la misma.

Ejemplo 8.37 (Ejemplar tipo).
La membrecía de un animal a una determinada especie se hace por comparación con un *ejemplar tipo*.

Estas consideraciones sugieren la introducción de una noción general: la de *cosa de referencia*:

Definición 8.28 (Cosa de referencia).
Una cosa x_f con espacio de estados $\mathbb{S}(x_f)$ es una *cosa de referencia* si existe un modelo funcional de una cosa $X_m = \langle \mathbb{S}(x_f), \mathbb{F} \rangle$; es decir, el conjunto $M = \mathbb{S}(x_f)$ y $\mathbb{F} : \mathbb{S}(x_f) \to \mathsf{P}$.

Así, pues, la noción de sistema de referencia se reduce a la más general de cosa de referencia. Observemos que el conjunto indeterminado M es el espacio de estados de una cosa patrón: de esa manera es posible caracterizar las propiedades de una cosa por comparación con otras elegidas de una vez para siempre. En ese sentido, todas las propiedades son relacionales: los atributos involucran referencias a una cosa de referencia, por lo menos, y a veces a varias.

Ejemplo 8.38 (Sistema de las estrellas fijas).
En mecánica celeste, es usual referir los movimientos planetarios al *sistema de las estrellas fijas*: el conjunto de estrellas cercanas a nuestra galaxia[3]. Estas estrellas definen un conjunto de *direcciones* desde el centro de masa del sistema solar a las estrellas. Con este conjunto de direcciones (que se representa cada una con un versor) es posible construir tres ejes ortogonales, de acuerdo con alguna convención. Este sistema de coordenadas cartesianas es el espacio de estados del modelo del sistema de las estrellas fijas. Desde el punto de vista de la mecánica celeste, las otras propiedades del sistema son irrelevantes.

Ejemplo 8.39 (Longitud, tiempo y masa en mecánica celeste).
Las unidades de longitud, tiempo y masa introducen otras cosas de referencia en la mecánica celeste. La unidad de longitud usual es el radio de la órbita terrestre, de modo que la Tierra se transforma en una cosa de referencia. Lo mismo ocurre con la unidad de tiempo, que se basa sobre la rotación de la Tierra. Como unidad de masa, se usa la masa solar, de modo que el Sol es otra cosa de referencia[4].

[3] Existen varias versiones del sistema de referencia, designadas de acuerdo con el catálogo estelar con el que se construye: `FK4`, `FK5`, `Hipparcos`.

[4] La precisión actual de las medidas en mecánica celeste, permiten la reducción de las unidades de longitud y tiempo en mecánica celeste a la unidad de tiempo en el laboratorio. Esto permite eliminar a la Tierra como cosa de referencia. No ocurre lo mismo con la masa, cuya determinación en gramos depende del valor de la constante de gravitación universal G, que se conoce con poca precisión.

Capítulo 9

Transformación

Pocas nociones han sido tan importantes para el desarrollo de la ciencia moderna como la de cambio, y al mismo tiempo, pocas han sido tan difíciles de analizar. Aún ahora, con la nueva matemática y las computadoras, no podemos explicar qué ocurre cuando se revuelve una taza de café, mientras que ya Arquímedes podía explicar su estado con el líquido en reposo.

Pero en la filosofía de Heráclito el Cosmos, el edificio mismo, se altera permanentemente y "todo fluye" ([70]):

> No se puede sumergir dos veces en el mismo río (91) *pues* Diversas aguas fluyen para los que se bañan en los mismos ríos (12) *y hasta* El sol es nuevo cada día (6).

No es de extrañar que esta inestabilidad perpetua haya aterrorizado a los griegos, pues aún nos aterroriza: la perpetua amenaza de la desgracia y la muerte (pero también de la felicidad y el nacimiento) es la consecuencia del cambio. Toda esa inquietud por la transitoriedad está resumida en un verso de Borges [12, El otro, el mismo]:

> *La meta es el olvido*

La ciencia moderna, desde Galileo a nuestros días, se ha ocupado del cambio: la mecánica celeste, la termodinámica de procesos irreversibles y la teoría de la evolución son ejemplos de teorías científicas creadas con el único fin de analizar el cambio en distintos aspectos de la naturaleza. En el presente capítulo, desarrollaremos nuestra ontología para examinar lo que tienen en común.

9.1 La noción de cambio

9.1.1 Evento y cambio

Para comenzar nuestro análisis, introduciremos una noción algo más general que la de cambio.

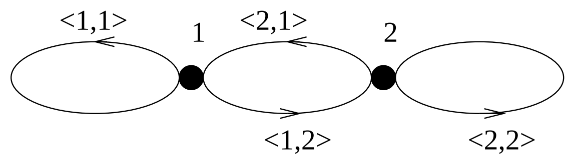
Definición 9.1 (Evento).
Un *evento* e es un par ordenado de estados de una cosa X. Si $s, s' \in \mathbb{S}$:

$$e = \langle s, s' \rangle \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}$$

Los elementos de la diagonal $i_s = \langle s, s \rangle$ se llaman los *eventos idénticos.*

Definición 9.2 (Cambio).
Un *cambio* en una cosa X es un evento distinto de la identidad. $e \notin i_s$.

Figura 9.1: Diagrama de transición para un sistema de dos estados



Esta definición describe correctamente la noción de cambio, con los elementos ya introducidos en la presente ontología. Observemos, en particular, que esta definición no utiliza la noción de tiempo. Por el contrario, usaremos la noción de cambio para desarrollar una teoría del tiempo.

Ejemplo 9.1 (Partícula unidimensional).
El estado de una partícula unidimensional está descripto por el par ordenado $\langle x, p\rangle$. Un evento está descripto, entonces, por el par ordenado $\langle x_1, p_1\rangle, \langle x_2, p_2\rangle$.

Ejemplo 9.2 (Sistema de dos niveles).
En el sistema de dos niveles (Ejemplo 8.15) los eventos posibles pueden representarse por la matriz:

$$\begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,2\rangle \\ \langle 2,1\rangle & \langle 2,2\rangle \end{pmatrix}$$

o por el diagrama de transición de la figura 9.1.

Con la noción de cambio, introducieremos otra noción relacionada: la de *mutabilidad*:

Definición 9.3 (Mutabilidad).
Una cosa es *mutable* si su espacio legal de estados $\mathbb{S}_{\mathbb{L}}$tiene al menos dos puntos. las cosas no mutables se llamas *inmutables*.

El siguiente teorema es consecuencia del axioma 8.10:

Teorema 9.1 (Mutabilidad de la materia).
Todo objeto mutable es material.

Pasemos ahora a considerar secuencias de eventos.

Definición 9.4 (Evento compuesto).
Sean $e = \langle s_1, s_2\rangle, e' = \langle s_3, s_4\rangle$ dos eventos de una cosa X. Diremos que $e'' = \langle s_1, s_4\rangle$ es el evento compuesto $e'' = e \circ e'$ si y sólo si $s_2 = s_3$.

Observemos que la composición de eventos (como la de cualquier correspondencia) es una operación parcial definida sobre el producto cartesiano del espacio de estados. Esta propiedad de composición, sugiere introducir un nuevo ente que represente correctamente las propiedades de composición de eventos:

Definición 9.5 (Espacio de eventos).
Dada una cosa X se llama *espacio de eventos* de X a la terna $\mathcal{E}(x) = \langle \mathbb{S}(x), \mathbb{S}(x) \times \mathbb{S}(x), \circ\rangle$, cuyos miembros satisfacen las definiciones 9.1, 9.2 y 9.4.

Definición 9.6 (Proceso).
Un *proceso* (o también *evento complejo*) es la composición de varios eventos:

$$\pi(x) = \bigcirc_i e_i(x)$$

El número de eventos (o el número de estados) no tiene por qué ser finito: un proceso se puede tratar como una composición de eventos infinitesimales mendiante un proces adecuado de paso al límite[1].

Por las propiedades de la relación de composición de eventos, un proceso es independiente de la secuencia de estados intermedios. Esto sugiere introducir na relación de orden parcial sobre el espacio de eventos:

Definición 9.7 (Precedencia de eventos).
Si $e, e' \in \mathbb{S}^2$ entonces

$$e \preccurlyeq e' \stackrel{\text{def}}{=} (\exists e'')_{\mathbb{S}^2}(e'' = e \circ e')$$

Puesto que el espacio de estados está definido respecto de una cosa de referencia x_f, la precedencia es una propiedad relacional, relativa a x_f. Es fácil ver que la relación $\preccurlyeq$ es irreflexiva (pues ningún evento (salvo la identidad) se precede a sí mismo), antisimétrica y transitiva y por lo tanto es una relación de *orden estricto* parcial. Por lo tanto, el conjunto $\langle \mathcal{E}(x), \preccurlyeq \rangle$ es un conjunto estrictamente ordenado. En este orden, que es un orden parcial, está la semilla de la noción de tiempo.

9.1.2 Cambio y ley

Todos los cambios en la naturaleza están limitados por leyes. Definiremos pues:

Definición 9.8 (Evento legal).
Un evento $e = \langle s, s' \rangle$ se llama *legal* si $s, s' \in \mathbb{S}_{\mathbb{L}}$.

Definición 9.9 (Proceso legal).
Un proceso se llama legal si es la composición de eventos legales.

Definición 9.10 (Espacio de eventos legales).
Se llama *espacio de eventos legales* de una cosa X a la restricción a estados legales del espacio de eventos:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(x) == \langle \mathbb{S}_{\mathbb{L}}(x), \mathbb{S}_{\mathbb{L}}(x) \times \mathbb{S}_{\mathbb{L}}(x), \circ_L \rangle$$

En esta última definición, la operación $\circ_L$ designa la composición de eventos legales.

Obviamente, un proceso legal cualquiera se puede describir como una función que da el estado final s_f en función del estado inicial s_i y del estado de la cosa de referencia.

Definición 9.11 (Transformación legal).
Diremos que una función $g : \mathbb{S}_{\mathbb{L}}(x) \times M \to \mathbb{S}_{\mathbb{L}}(x)$ es *compatible con las leyes* o también que es una *transformación legal* de X. El conjunto de todas las transformaciones legales de X se designa como $\mathbb{G}_{\mathbb{L}}(X)$.

Ejemplo 9.3 (Oscilador Armónico).
En el ejemplo 8.29, las transformaciones legales son las funciones (8.9), expresadas en función de las condiciones iniciales, $\langle x(t_0), p(t_0) \rangle$.

Ejemplo 9.4 (Ley de proporciones definidas).
En el equilibrio químico

$$2\,\mathrm{H_2} + \mathrm{O_2} \leftrightarrow 2\,\mathrm{H_2O}$$

las transformaciones legales son las que conservan las masas:

$$2m(\mathrm{H}) + m(\mathrm{O}) = 2m(\mathrm{H_2O})$$

[1] El tratamiento de procesos estocásticos o cuánticos mediante integrales funcionales es un ejemplo de “paso al límte adecuado”.

Ejemplo 9.5 (Leyes de Mendel).
Si $\mathbf{t} \in M$, los cambios legales en el fenotipo y genotipo de una población están ligados por $Q(\mathbf{t}) = q^2(\mathbf{t})$.

Como vemos en los ejemplos anteriores, cada proceso se puede parametrizar como una sucesión de estados $s(\mathbf{t})$, equivalente a la sucesión de eventos. La representación funcional es, por lo general, mucho más simple (cuando puede construirse) que la representación como una sucesión de eventos.

Ejercicio 9.1 (Oscilador armónico).
Mostrar, en el caso del oscilador armónico, que una sucesión de eventos $\langle x(t), p(t)\rangle, \langle x(t+\Delta t), p(t+\Delta t)\rangle$ es equivalente a la representación funcional (8.9).

Las consideraciones anteriores sugieren introducir una noción fundamental: la de *historia ontológica* de una cosa X:

Definición 9.12 (Historia ontológica).
Sea $\mathbb{F}(X)$ la función de estado de la cosa X, relativa a la cosa de referencia X_f. Se llama *historia ontológica* de X al conjunto:

$$h(x) = \{\langle \mathbf{t}, \mathbb{F}(\mathbf{t})\rangle \mid \mathbf{t} \in \mathbb{S}(x_f)\}$$

La noción de historia ontológica generaliza la noción de evolución temporal (o espacial) de un sistema físico. Por lo general, el parámetro $\mathbf{t}$ es el tiempo (o la posición en el espaciotiempo, con respecto de x_f), pero las definiciones que hemos dado no involucran consideraciones espaciotemporales: son abstractas y las utilizaremos para construir la noción de espaciotiempo. Es sorprendente que, sin tener estas nociones, se pueda definir el comienzo y el fin de un proceso. Podemos hacerlo pues el espacio de eventos es un espacio parcialmente ordenado por la relación $\preccurlyeq$.

Teorema 9.2.
Un proceso en una cosa x es un subconjunto parcialmente ordenado de $\mathcal{E}$:

$$\pi(x) = \langle E^* \subset \mathcal{E}(x), \preccurlyeq\rangle$$

Definición 9.13 (Comienzo y fin de procesos).
Un proceso *comienza* en un evento e_i si $e_i \preccurlyeq \min E^*$, es decir, es una cota inferior de E^*. Dualmente, un proceso termina en e_f si éste es una cota superior de E^*.

Definición 9.14 (Estados iniciales y finales).
La primera componente del evento inicial de un proceso π, e_i, se llama el *estado inicial* $s_i(\pi)$ y la segunda componente del evento final e_f el *estado final* $s_f(\pi)$.

Finalmente, estamos en condiciones de enunciar los axiomas que describen el cambio de las cosas. El primero es el principio enunciado por Heráclito: *panta rhei* (todo fluye). La enunciaremos usando la representación funcional de un proceso:

Axioma 9.1 (Principio de Heráclito).
Toda cosa cambia:

$$(\forall x)_\Theta(\exists \mathbf{t})[\mathbb{F}(\mathbf{t}) \neq \mathbb{F}(\mathbf{t}_i)]$$

Nuestro siguiente axioma formaliza (y generaliza) las nociones de nacimiento y muerte de las cosas:

Axioma 9.2 (Existencia de principio y fin).
Todo proceso tiene un principio (estado inicial) y un fin (estado final).

Este axioma no contradice el principio de Epicuro (teorema 8.7), pero su relación con las propiedades de asociación no es clara. De hecho, el nacimiento y muerte de las cosas se hace por asociación y disociación de sus componentes, y cada uno de ellos es un proceso. Podemos generalizar esta noción, afirmando que dado cualquier proceso, hay otros procesos que lo preceden y lo siguen:

Axioma 9.3 (Precedencia de procesos).
Dado un proceso $\pi(x)$ existen otros procesos $\pi(y)$ y $\pi(z)$ tales que:

$$\pi(y) \preccurlyeq \pi(x) \preccurlyeq \pi(z)$$

Así, el nacimiento de una persona está precedido por su gestación[2] y su muerte por la putrefacción: el cambio es continuo, no sólo en cada cosa sino en cada asociación de cosas.

9.2 Posibilidad

La ciencia factual se ocupa de hechos: acontecimientos que ocurren en la naturaleza. En los capítulos anteriores hemos argumentado que la discripción de la naturaleza debe hacerse con teorías que tienen referentes factuales. Sin embargo, las teorías describen hechos *posibles* y su *realización* depende de *circunstancias* adicionales, que deben tenerse en cuenta. Esta noción de posibilidad es muy importante, y el propósito de esta sección es elucidar su contenido.

9.2.1 Hechos y posibilidad

Con lo que antecede, estamos en condiciones de dar una definición rigurosa de hecho:

Definición 9.15 (Hecho).
Un *hecho* es un estado o evento de una cosa:

$$f = \begin{cases} s \in \mathbb{S}(X) \\ e \in \mathbb{S}(X) \times \mathbb{S}(X) \end{cases}$$

Observemos que la defínción 9.15 no implica que el hecho ocurra: sólo define los hechos *concebibles*. Una precisión mayor sobre los hechos la obtenemos distinguiendo los hechos concebibles de los hechos *posibles*. El axioma siguiente define con precisión la noción de posibilidad:

Axioma 9.4 (Posibilidad).
Un hecho f es realmente posible *si y sólo si es un hecho legal (es decir: sea s o e en la definición 9.15 son legales).*

La primera consecuencia es:

Teorema 9.3.
Los hechos ilegales son imposibles.

En particular, los milagros (usualmente definidos como una "suspensión de las leyes naturales") son imposibles en esta ontología.

La definición anterior de posibilidad no caracteriza la estructura del conjunto de hechos. El axioma siguiente postula una estrucutra bién conocida sobre

$$F = \{f | f \text{ es un hecho posible}\}$$

.

[2] O por la "travesura" de los padres.

Axioma 9.5 (Álgebra de hechos).
Sea F el conjunto de hechos posibles conectados con una cosa X. Sobre los elementos de este conjunto, existe un álgebra de Boole de hechos posibles, con la siguiente interpretación:

$$
\begin{aligned}
x &\stackrel{\wedge}{\Rightarrow} \textit{un hecho posible}\\
x \curlyvee y &\stackrel{\wedge}{\Rightarrow} x \textit{ o } y \textit{ son hechos posibles}\\
x \curlywedge y &\stackrel{\wedge}{\Rightarrow} x \textit{ e } y \textit{ pueden componerse}\\
x' &\stackrel{\wedge}{\Rightarrow} \textit{lo que es posible cuando } x \textit{ no lo es}
\end{aligned}
$$

Algunos hechos posibles pueden realizarse: ocurrir en la realidad. Esta importante distinción entre *potencia* y *acto* se debe a Aristóteles [97, II, p. 32]. Podemos analizar esta distinción con una *función de realidad*, que a cada hecho le asigne una proposición $\mathrm{Oc}(x) \in S(x)$ que afirma su ocurrencia[3].

Definición 9.16 (Función de ocurrencia).
Una función $\mathrm{Oc} : F \to S(x)$ si satisface:

$$
\begin{gathered}
(\forall x)_F[\mathrm{Oc}(x') = \neg\,\mathrm{Oc}(x)]\\
(\forall x, y)_F[\mathrm{Oc}(x \curlywedge y) = \mathrm{Oc}(x) \wedge \mathrm{Oc}(y)]
\end{gathered}
$$

Axioma 9.6 (Ocurrencia).
Para toda cosa X, con espacio de hechos F:

$$
\begin{gathered}
(\forall x)_F[\mathrm{Oc}(x) \stackrel{\wedge}{\Rightarrow} \textit{la ocurrencia de } x]\\
(\forall x)_F[\mathrm{Oc}(x') \stackrel{\wedge}{\Rightarrow} \textit{la no ocurrencia de } x]\\
(\forall x, y)_F[\mathrm{Oc}(x \curlywedge y) \stackrel{\wedge}{\Rightarrow} \textit{la ocurrencia de } x \textit{ y de } y]
\end{gathered}
$$

Esta teoría caracteriza parcialemente la dicotomía posibilidad - realidad. Sin embargo, esta caracterización es sólo preliminar: no hay todavía ninguna caracterización de cuáles hechos son posibles y cuáles realizan. Cada ciencia, en particular, debe caracterizar los hechos posibles y ocurrentes en su ámbito con conjuntos adecuados de leyes y proposiciones.

Otra importante distinción en filosofía de la ciencia es la distinción entre hechos *necesarios* y *contingentes*. Nuevamente, se puede caracterizar la distinción entre ambos con las nociones de posibilidad y de ocurrencia:

Definición 9.17 (Necesidad y contingencia).
Un hecho x se llama *necesario* si existe otro hecho y, llamado la *circunstancia* tal que $\mathrm{Oc}(y) \Rightarrow \mathrm{Oc}(x)$. Un hecho se llama *contingente* si y sólo si no es necesario.

A veces se llama al hecho y la *causa* de x, poro este nombre no es correcto: para cualquiera de nosotros, el hecho de estudiar ciencia requiere la circunstancia y de haber nacido; pero el nacimiento no es la causa de estudiar ciencia.

Es común en la filosofía de la ciencia oponer *azar* a necesidad [98]. Pero en la presente ontología, un hecho contingente puede no ser azaroso, mientras que un hecho azaroso puede ser necesario. La distinción la analizaremos en la sección 9.3.

[3]El conjunto de hechos, junto con la función O proporciona una interpretación intensional del modelo que estamos describiendo. Una interpretación extensional se obtiene si la función afirma su valor de verdad.

En conclusión, cada enunciado de ley describe posibilidades. Por ejemplo, las funciones (8.9), que describen los estados legales de un oscilador armónico, son trayectorias posibles en el espacio de estados. La realización de un estado (o de un cambio de estado) en el oscilador dependerá de las circunstancias: las condiciones iniciales $\langle x_0, p_0 \rangle$.

9.2.2 Disposición

La noción de posibilidad permite analizar un tipo de propiedades de una cosa que sólo se manifiestan en presencia de circunstancias especiales. Estas propiedades se llaman *disposiciones*.

Ejemplo 9.6 (Valencia).
La valencia de un átomo (capacidad de combinarse) sólo se manifiesta en presencia (en yuxtaposición) de otro átomo, para formar el compuesto químico adecuado.

Ejemplo 9.7 (Refrangibilidad).
La refrangibilidad de un cristal se manifiesta en presencia (en superposición) de un rayo de luz, que se refracta.

Ejemplo 9.8 (Fertilidad).
La fertilidad de un ejemplar sólo se manifiesta en presencia del sexo opuesto, para dar lugar a un descendiente.

En los ejemplos anteriores, la propiedad en cuestión $P(x)$ se manifiesta por la presencia de otra cosa con una propiedad $Q(y)$ tal que el sistema compuesto tiene una propiedad emergente manifiesta $R(z)$. Tratemos ahora de dar una definición rigurosa de la noción de propiedad manifiesta y disposición.

Definición 9.18 (Propiedad manifiesta).
Una propiedad $P(x)$ se llama *manifiesta* si su posesión implica que los hechos que ocurren en x la involucran:

$$\operatorname{Man} P(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x \gtrdot P) \Rightarrow (\forall f)_{F(x)} (\exists \sigma)_f (\sigma \overset{\wedge}{\Rightarrow} P)$$

Definición 9.19 (Disposición).
Sea $z = x \oplus y$ una cosa compuesta. Diremos que la propiedad $P(x)$ es una *disposición* de x si existe otra propiedad $Q(y)$, llamada el *complemento* de P con respecto de y, tal que existe una propiedad de la cosa compuesta z emergente y manifiesta $R(z)$.

Observemos que la propiedad Q también es una disposición: la sal de mesa se disuelve en agua porque el agua tiene la disposición para disolverla. Las propiedades P y Q pueden ser heredadas por z: la salmuera, mientras no esté saturada, puede disolver más sal o puede adelgazarse añadiendo agua.

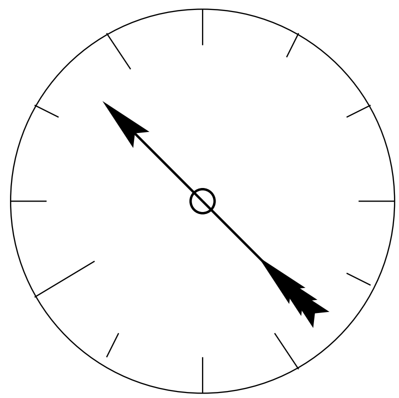
Ejercicio 9.2.
Formalizar la definición anterior de disposición.

Por otra parte, la cosa y en la definición anterior puede coincidir con x y $P = Q$. De este modo, las propiedades manifiestas pueden considerarse como un caso particular de la noción general de disposición.

9.3 El azar

Las disposiciones P que hemos analizado se realizan siempre que se realice la disposición Q, por eso se llaman también *propensiones causales*. Un tipo muy distinto de propensiones aparecen cuando hay leyes probabilísiticas en juego. Estas leyes determinan untipo especial de cambio: el cambio estocástico y un tipo especial de disposiciones: las disposiciones estadísticas o propensiones.

Figura 9.2: La *Rueda de la Fortuna*



9.3.1 Consideraciones intuitivas

El movimiento de una hoja que cae, las formas de las nubes o los reflejos del sol sobre el mar son acontecimientos cotidianos, preo fascinantes por su sorprendente variedad. En número de votos obtenidos por un candidato o el de muertes en un hospital son otros ejemplos de fenómenos "imprevisibles". Una descripción más precisa de "imprevisibilidad", es que las variables de estado V_i de estos sistemas muestran una inestabilidad: las historias $h(\mathbf{t})$ son conjuntos sumamente complicados en el espacio de estados de las cosas involucradas.

Ejemplo 9.9 (La Rueda de la fortuna).
Se trata de un dial dividido en M sectores numerados (Figura 9.2). Una aguja que gira alrededor del centro marca al detenerse el sector "ganador". Si θ es el ángulo que forma la aguja con el sector de origen, la ecuación de movimiento de la aguja es:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2$$

en donde θ_0 es la dirección inicial de la aguja, ω_0 su velocidad angular inicial y α la decelaración fricativa.

Si introducimos el número de vueltas dado por la rueda:

$$N_v = \frac{\theta_f - \theta_i}{2\pi} = \frac{\omega^2}{4\pi\alpha}$$

hallamos fácilemnte la expresión para la variación de la posición angular de la flecha producida por una variación de la velocidad angular inicial:

$$\Delta\theta_f = 2\pi N_v \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}$$

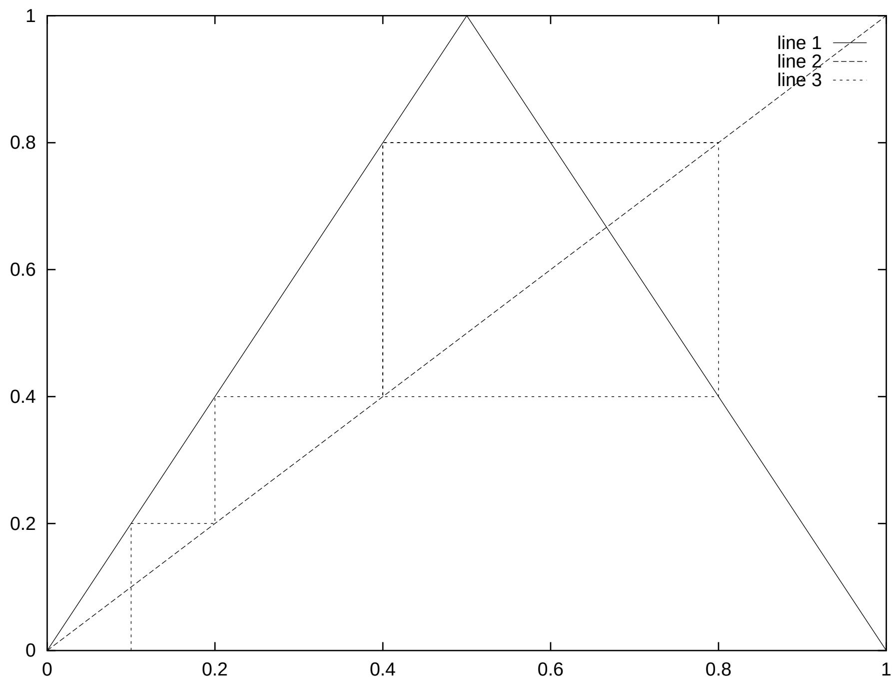
Esta variación cambiará el resultado del sorteo si:

$$\Delta\theta_f > \frac{2\pi}{M}$$

y por lo tanto si

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} > \frac{1}{N_v M}$$

Figura 9.3: Mapa triangular. La figura muestra el mapa triangular (línea 1), la identidad (línea 2) y una representación gráfica de las primeras iteraciones del mapa (líena 3).



Esta variación relativa es muy pequeña si N_v y M son razonablemente grandes, digamos del orden de 10. Un número grande de vueltas se obtiene si la flecha se hace girar "con fuerza".

Ejemplo 9.10 (Sistemas dinámicos caóticos).
Fenómenos mucho más dramáticos de "imprevisión" producen los *sistemas dinámicos caóticos*: aquellos en los cuales un pequeño cambio en las condiciones iniciales se amplifica exponencialmente. Un ejemplo sencillo de estos sistemas es el *mapa trangular* (Figura 9.3):

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Las iteraciones de este mapa, a partir de un valor inicial x_0:

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

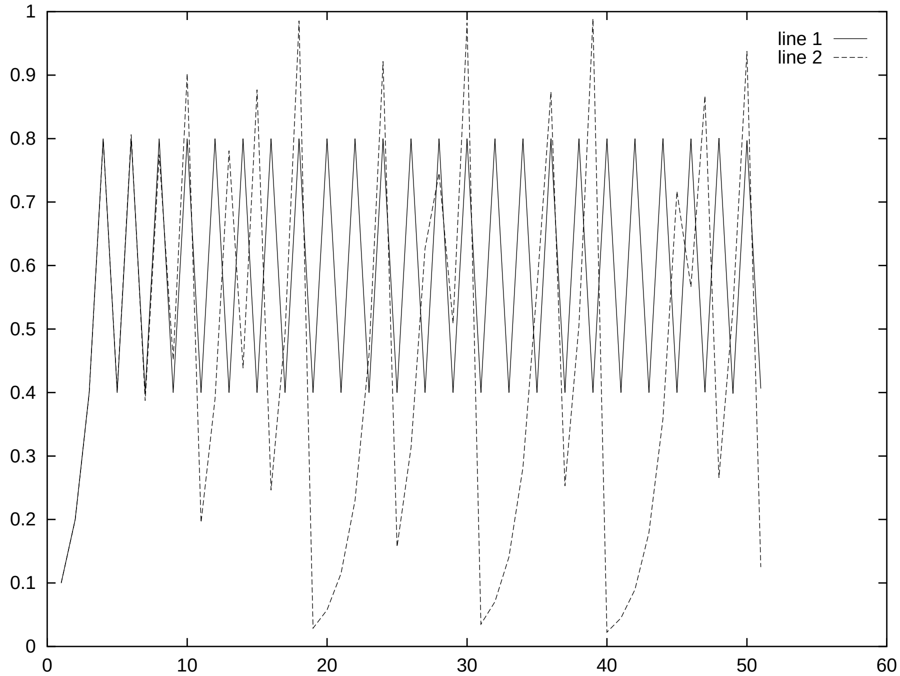
tienen un aspecto aleatorio. Una pequeña perturbación de la semilla Δx_0 se amplifica exponencialmente en cada iteración:

$$|\Delta x_{n+1}| \geq 2|\Delta x_n| \geq 2^{n+1}|\Delta x_0|$$

Si la perturbación Δx_0 afecta el n-ésimo dígito binario, después de n iteraciones su crecimiento habrá borrado todo recuerdo de la trayectoria original.

A pesar de la complejidad de su comportamiento, debida a su inestabilidad, los sistemas aleatorios muestran cierta estabilidad en su comportamiento, llamada

Figura 9.4: Historias del mapa triangular. La figura muestra dos historias diferentes del mapa triangular: una periódica (líneas 1), y otra caótica (línea 2).



regularidad estadística. Existen funciones de las variables de estado, tal como los *promedios* que tienen un comportamiento regular. Por ejemplo, examinemos la *frecuencia* con que un sistema aleatorio toma un estado dado. Para ser precisos, supongamos que tanto el espacio de estados del sistema $\mathbb{S}_{\mathbb{L}}(x)$ como el de la cosa de referencia $M = \mathbb{S}_{\mathbb{L}}(x_f)$ son discretos. Sea N_T el número de estados visitados y sea N_s el número de veces que el estado de x es s. La frecuencia del estado s es:

$$f(s) = \frac{N_s}{N_T} \tag{9.1}$$

La frecuencia de un estado (sea observado o no) tiene estabilidad estadísitca.

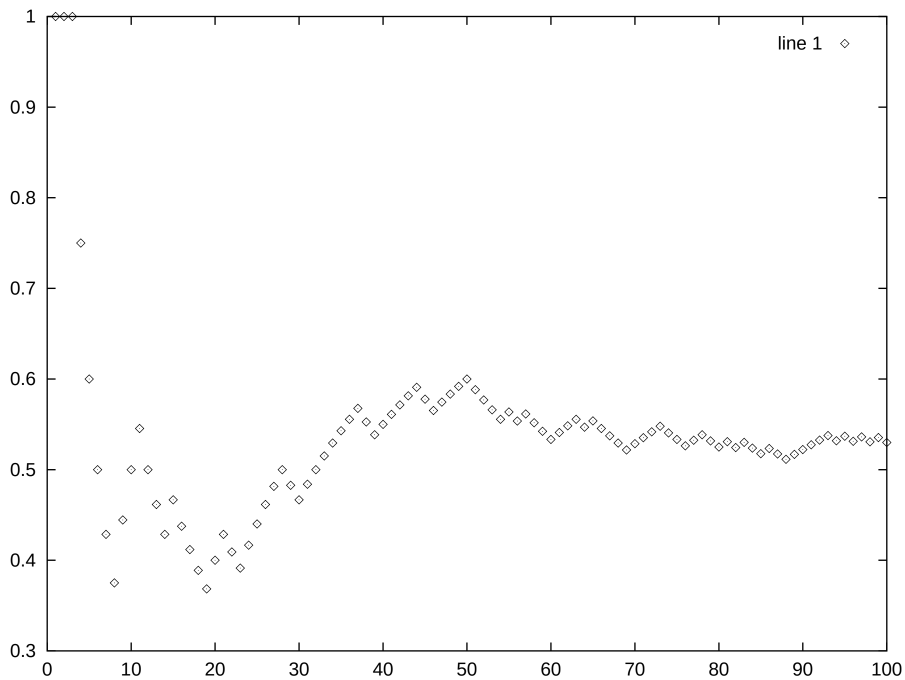
Ejemplo 9.11 (Moneda).
Se arroja una moneda x al aire N veces. El espacio de estados de la moneda $\mathbb{S}_{\mathbb{L}}(x) \subset \Re^3 \times SO(3)$ puede colapsarse a dos estados: ${\mathbb{S}_{\mathbb{L}}}^C(x) = \{\text{cara}, \text{ceca}\}$. La figura 9.5 muestra el comportamiento de la frecuencia relativa con respecto del "tiempo colapsado" $\mathbf{t} = \mathbb{N}$. Al principio, cuando N_T es pequeño, la frecuencia relativa varía bruscamente, pero a medida que N_T crece tiende a estabilizarse alrededor de $f = 0.5$. Para $N_T > 70$ las fluctuaciones son pequeñas.

9.3.2 Probabilidad

Una teoría matemática de la probabilidad debe elucidar varias nociones: *muestra*, *suceso*[4] y *probabilidad*. Las definiciones se eligen de modo tal que con ellas se puedan construir modelos útiles de la realidad [59].

[4]Aquí llamamos *suceso* a lo que en teoría de probabilidades, se suele llamar *eventos*, pues lamentablemente, la palabra "evento" se utiliza en este curso para designar un cambio de estado.

Figura 9.5: Variación de la frecuencia de *caras* un una serie de tiradas de una moneda. Con pocas tiradas, la frecuencia varía bruscaamente, pero a medida que el número de tiradas crece, la frecuencia tiende a estabilizarse en un valor próximo a $f = 0.5$.



Definición 9.20 (Suceso).
Sea U un conjunto arbitrario, cuyos elementos llamaremos *sucesos elementales* o *muestras*, y que llamaremos *espacio muestral*. Se llama *suceso* a una parte de U.

Ejemplo 9.12 (Moneda).
En el ejemplo 9.11, el conjunto de eventos elementales es:

$$U = \{\text{cara}, \text{ceca}\}$$

El conjunto de los sucesos es el conjunto de las partes de U:

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}(U) = \{\varnothing, \{\text{cara}\}, \{\text{ceca}\}, U\}$$

En un espacio muestral finito, todos los sucesos son,en principio, interesantes. En un espacio muestral infinito, con la potencia del continuo, en cambio, sólo ciertas familias de sucesos lo son. Estas familias, llamadas *σ-álgebras*, son cerradas respecto de las operaciones sobre conjuntos:

Definición 9.21 (σ-Álgebra).
Un conjunto $\mathcal{S}$ se llama una *σ-álgebra* si satisface las siguientes condiciones:

1. $U \in \mathcal{S}$
2. $a \in \mathcal{S} \Rightarrow \complement a \in \mathcal{S}$
3. $(\forall A_i)_{\mathcal{S}}[(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \in \mathcal{S}]$
4. $(\forall A_i)_{\mathcal{S}}[(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i) \in \mathcal{S}]$

Estamos ahora en condiciones de enunciar los axiomas de la teoría de probabilidades.

Definición 9.22 (Probabilidades).
Una función $P : \mathcal{S} \to [0,1]$ se llama *medida de probabilidad* sobre U si satisface:

Normalización: $P(U) = 1$

Aditividad: Si $A \cap B = \varnothing$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Continuidad: Si una secuencia de sucesos $B_i \in \mathcal{S}$ satisface las condiciones:

> **Encaje:** $B_{i+1} \subset B_i$
> **Contigüidad:** $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \varnothing$
>
> se satisface:
>
> $$\lim_{i\to\infty} P(B_i) = 0$$

Con esta definición es posible ahora demostrar algunos teoremas básicos de la teoría de probabilidades. Otras definiciones importantes son las de *probabilidad condicional*:

Definición 9.23 (Probabilidad condicional).

$$P(A|B) = P(A \cup B)/P(B)$$

y la de sucesos independientes:

Definición 9.24 (Sucesos independientes).
Dos sucesos A y B son *independientes* si

$$P(A|B) = P(A)$$

Al fin estamos en condiciones de definir la estructura matemática que usaremos:

Definición 9.25 (Espacio de probabilidad).
Sea U un espacio muestral, $\mathcal{S}$ una *σ-álgebra* y $P : \mathcal{S} \to [0,1]$ una medida de probabilidad. La terna ordenada $\mathcal{P} = \langle U, \mathcal{S}, P\rangle$ se llama un *espacio de probabilidad.*

Una última definición:

Definición 9.26 (Variable aleatoria).
Se llama *variable aleatoria* ξ sobre el espacio de probabilidad $\mathcal{P}$ a una *función medible* de rango real:

$$\xi : U \to \Re$$

tal que

$$(\forall x)(\exists F(x))\,[P(\xi < x) = F(x)]$$

La función:

$$F : \Re \to [0,1]$$

se llama *función distribución* de la variable aleatoria ξ.

9.3.3 Propensión

Con las definiciones de la sección 9.3.2 podemos formalizar la noción de disposición estocástica o propensión [22].

Definición 9.27 (Espacio de estdo probabilístico).
El espacio de estado de una cosa x se llama*espacio de estado probabilístico* si existe una σ-álgebra $\mathcal{S}_L$ sobre $\mathcal{P}(\mathbb{S}_{\mathbb{L}})$ y una función $P : \mathcal{S}_L \to [0, 1]$ tal que

$$\mathcal{P}_L = \langle \mathbb{S}_{\mathbb{L}}, \mathcal{S}_L, P \rangle$$

sea un espacio de probabilidad.

Ejemplo 9.13 (Mecánica Estadística).
Sea un gas clásico, considerado como un conjunto de moléculas. El espacio de estados del sistema mecánico es el espacio de las fases:

$$\mathcal{F} = \{\langle q_i, p_i \rangle |\ i \in [1, 3N]\}$$

y el espacio legal de estados es la superficie de energía $\Omega \equiv H(q, p) = E$. Intuitivamente, la trayectoria $\mathbb{F}(t)$ es tan complicada que pasa arbitrariamente cerca de cualquier punto de la superficie de energía. Será fácil encontrar al sistema en regiones grandes del espacio legal de estados, por donde el punto representativo pase muchas veces. Esto sugiere introducir una medida de probabilidad sobre la superficie de energía, transformándolo en un espacio de estados probabilístico.

El espacio probabilístico Γ se construye introduciendo sobre la superficie de energía Ω la σ-álgebra Σ generada por los intervalos $\langle \Delta q_i, \Delta p_i \rangle$ y la medida de probabilidad:

$$P(\omega \subset \Omega) = \frac{\operatorname{Vol} \omega}{\operatorname{Vol} \Omega}$$

Esta medida de probabilidad se llama *ergódica*.

Ejemplo 9.14 (Mecánica cuántica).
En Mecánica cuántica la función de estado de un sistema ξ es un vector en el espacio de Hilbert $|\Psi(t)\rangle$. Si desarrollamos este vector en una base completa

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c(t)\, |v_i\rangle$$

podemos introducir un espacio probabilístico de estados de la siguiente manera. Sobre el espacio de estados $\mathbb{S}(\xi) = \mathcal{H}$ introducimos como σ-álgebra $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y como medida de probabilidad:

$$P(S \in \mathcal{S}) = \sum_{i \in S} |c_i(t)|^2$$

No es difícil verificar que el conjunto $\langle \mathbb{N}, \mathcal{S}, P \rangle$ es un espacio de probabilidad.

Ahora introduciremos la noción de propensión:

Definición 9.28 (Propensión).
Sea $z = x \oplus y$ una cosa compuesta, donde y puede ser la cosa nula $\Box$. Diremos que $H(x)$ es una *propensión* si y sólo si:

1. Existe una variable aleatoria η, con función de distribución F, tal que $\eta \overset{A}{\Rightarrow} H$.

2. $y \gg R$ tal que

$$P(\eta \in \omega | R) = \int_{\omega} dF(y)$$

De esta manera, toda propiedad representada por una variable aleatoria es una propensión. Esta afirmación establece un esquema de interpretación de las probabilidades en las ciencias naturales: toda probabilidad representa una propensión de alguna cosa. Esta es la *interpretación propensiva* de la probabilidad [109, 22].

Existen otras interpretaciones de la teoría de probabilidades [59, 22]:

Interpretación cásica: "La probabilidad es igual al cociente del número de *casos favorables* sobre el número de *casos posibles*, siempre que éstos sean equiprobables." Esta *definición clasica* de la probabilidad, debida a Laplace, es circular (o más bien, recursiva) y no arroja mucha luz sobre la naturaleza de la probabilidad. Enuncia, en cambio, un importante principio de simetría: sucesos de la misma clase deben tener la misma probabilidad.

Interpretación subjetiva: "La probabilida de una *proposición* dada es el grado de creencia en la misma." Esta interpretación, sostenida por Jeffreys, Keynes y Carnap, trata a la probabilidad como una propiedad de la mente de seres humanos cognoscientes. En la presente ontología no es posible formularla, pues las proposiciones sólo tienen propiedades formales y las mentes conscientes son procesos bioquímicos de algunos cerebros humanos.

Interpretación frecuentista: "La probabilidad es aquella magnitud física que se mide con la frecuencia." Esta proposición es correcta, pero no es una interpretación: habla de la manera de medir la probabilidad, mientras que una interpretación es una función $\Delta : T \to \Omega$. Sin embargo, ha habido intentos rigurosos de definir la probabilidad sobre la base de la frecuencia. La definición tiene la forma:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_A^{(n)}$$

en donde $f_A^{(n)}$ es la frecuencia de A en el n-ésimo miembro de una secuencia infinita de experimentos. Lamentablemente, el límite no existe a menos que se impongan complejas restricciones a la secuencia de experimentos.

Sin embargo, es posible formular la interpretación propensiva de la probabilidad en el lenguaje frecuentista introduciendo la noción de *conjunto estadístico*. Imaginemos un conjunto infinito de copias del sistema X, distribuidas de acuerdo a su propensión; es decir, proporcionalmente a la probabilidad de cada estado. Cada elemnto del conjunto se llama una *realización* del mismo. Las frecuencias del conjunto estadístico coinciden con las respectivas probabilidades. El conjunto estadísitco es, sin embargo, sólo una ficción útil para la práctica de la ciencia. La interpretación propensiva es mucho más "natural" y más simple que la reformulación frecuentista.

9.4 Sistemas

Definiremos ahora otra de las nociones básicas de nuestra ontología: la de sistema de cosas. Intuitivamente, un sistema es una colección de cosas ligadas por leyes naturales. La noción de ligadura, por otra parte, es sutil y exige un examen cuidadoso. Para hacerla, necesitamos introducir las nociones de presencia y acción.

9.4.1 Acción

Comenzaremos por definir la noción de presencia. Aprovecharemos la noción de posibilidad para hacerlo. Sea $h(y)$ una historia posible de la cosa y, descripta por una función de estado $\mathbb{G}(\mathbf{t})$, y sea x otra cosa definida por la función de estado $\mathbb{F}$. La presencia de x se manifestará alterando la historia de y a otra historia posible $h(y|x)$, descripta por una función de estado $\mathbb{H}$, determinada únicamente por $\mathbb{F}$y $\mathbb{G}$. Con más precisión:

Definición 9.29 (Presencia).
Diremos que una cosa y, con historia ontológica

$$h(y) = \{\langle \mathbf{t}, \mathbb{G}(\mathbf{t})\rangle | \mathbf{t} \in M\}$$

evoluciona en presencia de otra cosa x, con historia

$$h(x) = \{\langle \mathbf{t}, \mathbb{F}(\mathbf{t})\rangle | \mathbf{t} \in M\}$$

si existe una función de estado

$$\mathbb{H} = H(\mathbb{F}, \mathbb{G}) \neq \mathbb{F}$$

tal que

$$h(y|x) = \{\langle \mathbf{t}, \mathbb{H}(\mathbf{t})\rangle | \mathbf{t} \in M\}$$

Esta nueva cantidad es la *historia de y en presencia de x*.

Obsérvese que la nueva función de estado depende de $\mathbb{F}, \mathbb{G}$, pero no de $\mathbf{t}$.

Definición 9.30 (Acción).
Diremos que x *actúa sobre* y si la presencia de x cambia la historia de y:

$$x \triangleright y \stackrel{\text{def}}{=} h(y|x) \neq h(y)$$

Esta definición de acción es muy general: incluye toda forma de interferencia de una cosa sobre otra. Sin embago, no cualquier cosa actúa sobre una cosa dada x.

Ejemplo 9.15 (Astrología).
Los planetas actúan sobre la Tierra modificando su órbita alrededor del Sol. Sin embargo, no se ha detectado ninguna acción de los planetas sobre las historias de los hombres: mellizos que deberían estar afectados de la misma manera por los planetas tienen historias (desarrollo de la personalidad) muy distintas entre sí.

Definición 9.31 (Interacción).
Dos cosas *interactúan* si:

$$x \bowtie y \stackrel{\text{def}}{=} x \triangleright y \wedge y \triangleright x$$

Por lo general, en ciencias físicas y químicas se acostumbra a pensar que todo par de cosas interactúa, pero esto no es cierto en general:

Ejemplo 9.16 (Bronceado).
El Sol actúa sobre la piel de un bañista, bronceándolo, pero el bañista no broncea (ni enfría, ni abrillanta) al Sol.

En cambio hay un postulado más débil pero que es la base de toda la ciencia natural:

Axioma 9.7 (Conexión).
Toda cosa actúa sobre alguna cosa y sufre la acción de otra.

$$(\forall x)_\Theta (\exists y)_\Theta (\exists z)_\Theta \left[(x \triangleright y) \wedge (z \triangleright x) \right]$$

El axioma de conexión 9.7 justifica, entre otras cosas, el método experimental. Para investigar una cierta cosa x el experimentador trabaja activamente hasta encontrar otra cosa y que sea afectada por x (el "detector") y, si es posible, una cosa z que altere a x y le permita crear "condiciones controladas".

Ejemplo 9.17 (Astronomía).
En este caso la cosa x es un cuerpo celeste (planeta, estrella, satélite artificial …) y la cosa y es un telescopio. Salvo en el caso de los satélites artificiales (ue pueden ser controlados por una radio z) no existe una forma de "controlar" a x.

Ejemplo 9.18 (Cultivo de bacterias).
En un cultivo bacteriano (x), la cosa z es la cápsula de Petri que contiene el medio de cultivo y los antibióticos. La cosa y suele ser el ojo del observador, ayudado por el microscopio y medios adecuados de tintura.

Definiremos ahora algunos conceptos auxiliares importantes:

Definición 9.32 (Acción total).
La acción total de x sobre y es igual a la diferencia entre la historia en presencia de x y la historia espontánea.

$$\mathrm{Ac}(x,y) = h(y|x) \cap \complement h(y)$$

Definición 9.33 (Interacción total).
La interacción total entre x e y es:

$$\mathrm{Int}(x,y) = \mathrm{Ac}(x,y) \cup \mathrm{Ac}(y,x)$$

Estos conceptos sugieren introducir otra noción importante:

Definición 9.34 (Cambio espontáneo y forzado).
Una cosa *cambia espontáneamente* si:

$$h(y|x) = h(y)$$

En caso contrario, el cambio se llama *forzado*.

Ejemplo 9.19 (Radiación).
La radiación de un átomo puede ser espontánea o inducida por radiación incidente.

Ejemplo 9.20 (Entropía).
En el mundo de las cosas macroscópicas, los cambios espontáneos satisfacen la *ley de incremento de entropía*: $S_F \geq S_I$, en donde los subíndices indican los estados iniciales y finales.

Una relación dual a la de interacción es la de ligadura:

Definición 9.35 (Acoplamiento).
Dos cosas están *acopladas* (o *ligadas*) si al menos una actúa sobre la otra.

$$x \between y \overset{\mathrm{def}}{=} x \triangleright y \vee y \triangleright x$$

Ejemplo 9.21 (Bronceado).
El bañista está acoplado con el Sol.

Ejemplo 9.22 (Dispersión de Ruthenford).
La fuerza coulombiana acopla dos núcleos que colisionan.

Ejemplo 9.23 (Predador y presa).
Un predador y su presa (zorro y conejo, digamos) están acoplados mientras dura la caza.

Existen, por supuesto, acoplamientos más complicados. Por ejemplo, las constituciones de los estados modernos regulan un acoplamiento ternario entre los poderes ejecutivo, legislativo y judicial. Sin embargo, los acoplamientos binarios (descriptos por atributos binarios) son los más comunes e importantes en la naturaleza. Por otra parte, existen numerosos atributos que describen propiedades relacionales no ligantes. Por ejemplo, la posición de un cuerpo con respecto de otro es una relación binaria que no describe una ligadura.

Definición 9.36 (Acoplamiento total).
Se llama acoplamiento total el conjunto de todas las relaciones de acoplamiento en un conjunto de cosas $X \subset \Theta$.

$$\mathbb{A}(X) = \{i | (\forall x, y)_X (x \between_i y)\}$$

La estructura de acoplamiento de una cosa compuesta puede ser muy complejo:

Ejemplo 9.24 (Átomos).
El acoplamiento entre dos átomos contiene varios tipos de ligadura:

1. La interacción colombiana entre los núcleos.
2. La interacción de los núcleos con las nubes electrónicas.
3. La interacción de las nubes electrónicas entre sí. Esta última tiene varias partes:
   (a) La repulsión coulombiana.
   (b) Las fuerzas de intercambio.
   (c) La repulsión originada por el Principio de Pauli.

Sin embargo, el axioma de cardinalidad 8.7 nos permite enunciar un teorema importante:

Teorema 9.4 (Cardinalidad del acoplamiento total).
El acoplamiento total de una cosa es finito.

9.4.2 Sistemas

Llegamos ahora a una noción central de la ontología presente: la de sistema:

Definición 9.37 (Sistema).
Una cosa X de composición:

$$\mathcal{C}(X) = \{y | y \sqsubseteq X\}$$

se llama un *sistema* si existe un modelo tal que el acoplamiento total de sus partes no es nulo:

$$Ⓢ(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}(X) \neq \varnothing$$

Definición 9.38 (Conglomerado).
Una cosa X es un conglomerado si y sólo si no es un sistema.

El axioma 9.7 nos permite obtener algunos resultados importantes:

Teorema 9.5 (Sistemicidad).
Toda cosa es un sistema o parte de un sistema.

Teorema 9.6 (Universo).
El mundo $\blacksquare$ *es un sistema.*

Teorema 9.7 (Anidación).
Todo sistema es parte propia de otro sistema.

Una consecuencia de el teorema 9.7 es la existencia de un ambiente que rodea a cualquier sistema:

Definición 9.39 (Ambiente).
Se llama *ambiente* de un sistema σ al conjunto de las cosas que no son parte de σ pero que están acopladas con sus partes:

$$\mathcal{A}(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x | x \in \bigstar\sigma \wedge (\exists z)_{\mathcal{C}(\sigma)}(z \between x)\right\}$$

El conjunto de relaciones, ligaduras o no, que satisfacen las componentes del sistema y su ambiente es la estructura de σ.

Definición 9.40 (Estructura).
Se llama *estructura* del sistema σ el conjunto de relaciones satisfechas por las partes de σ y su ambiente.

Todas las cosas, excepto las cosas básicas, están compuestas de otras cosas. Esta propiedad no se extiende a todas las componentes de un sistema; por ejemplo, las cosas básicas no son sistemas. Sin embargo, algunas de las componentes de un sistema también lo son y esto induce una estructura sobre el conjunto de sistemas. Definamos pues:

Definición 9.41 (Subsistema).
Una cosa x es un *subsistema* del sistema σ si y sólo si es parte de σ y es un sistema:

$$x \Subset \sigma \stackrel{\text{def}}{=} Ⓢ\sigma \wedge Ⓢx \wedge x \sqsubseteq \sigma$$

9.4.3 Niveles y emergencia

La naturaleza contiene objetos de distinto grado de complejidad: a'tomos, moléculas, objetos macroscópicos, seres vivientes y seres pensantes. Esta complejidad es legal y no es extraño que tenga una estructura de niveles: los sistemas más complejos están formados por asociación de otros más simples. Trataremos de formalizar esta noción de nivel.

Definición 9.42 (Nivel).
Sea L una familia de conjuntos de cosas y $\precsim$ una relación de orden sobre L, que se lee *precede* o *es más simple*. Diremos que $\mathcal{L} = \langle L, \precsim \rangle$ es una *estructura de niveles* si:

1. L_i es más simple que L_j si las cosas de este último contienen en su composición cosas del primero:

$$L_i \precsim L_j \stackrel{\text{def}}{=} (\forall x)_{L_j}(\exists y)_{L_i}[y \in \mathcal{C}(x)]$$

Tabla 9.1: Estrucutura de niveles del mundo

Nivel	Subnivel	Composición	Propiedades emergentes
Elemental	Primario	Campos fermiónicos y bosónicos	
	Nucleónico	Nucleones	Confinamiento de quarks; fuerzas nucleares
Microscópico	Nuclear	Núcleos	Ligadura nuclear; reacciones nucleares
	Atómico	Átomos	Valencia, volumen atómico, polarizabilidad
	Molecular	Moléculas	Composición química
Macroscópico	Termodinámico	Cuerpos macroscópicos	Entropía, densidad, constante dieléctrica ...
	Químico	Cuerpos macroscópicos compuestos	Reacciones químicas; velocidad de reacción ...
	Bioquímico	Polisacáridos. polipéptidos, ácidos nucleicos	Reacciones bioquímicas, estructura en doble hélice ...
Biológico	Procariota	Bacterias, cianobacterias	Irritabilidad, metabolismo, reproducción ...
	Eucariota	Protistas	Núcleo diferenciado, organelas ...
	Metazoico	Plantas, hongos, animales	Estructura celular. Sexo

2. Una cosa pertenece al nivel L_i si su composición contiene sólo cosas de los niveles precedentes.

$$x \in L_i \overset{\text{def}}{=} \mathcal{C}(x) \subset \bigcup_{k=1}^{i-1} L_k$$

Teorema 9.8.
$\mathcal{L}$ es un conjunto ordenado por $\precsim$.

Los axiomas 8.16 y 8.18 garantizan:

Teorema 9.9.
Los sistemas de un nivel dado tienen propiedades emergentes distintas de las de los niveles que la preceden.

Es este teorema el que permite clasificar los distintos sistemas existentes en la naturaleza en niveles: la existencia de nuevas propiedades emergentes, que distinguen un nivel de otro.

9.4.4 La estructura del mundo

La noción de nivel de organización que acabamos de introducir permite describir con precisión la estructura del mundo, tal como la modela la ciencia moderna. La tabla 9.1 muestra parcialmente esa estructura.

Capítulo 10

Espacio y tiempo

Espacio y tiempo son presupuestos básicos de cualquier teoría científica, excepto la lógica y la matemática. Toda otra ciencia los trata como conceptos primitivos y presupone propiedades analíticas y geométricas para estas entidades. Aún la Relatividad Genera, una teoría que representa la gravitación con objetos geométricos, toma esta actitud [43]. La *pregeometría* es una disciplina parcialmente filosófica, parcialmente física, cuyo objetivo es elucidar la naturaleza del espacio y el tiempo.

La naturaleza del espacio y del tiempo ha sido el objeto de un largo debate desde hace trescientos años, centrado sobre la confrontación entre dos posiciones antagónicas: absolutismo y relacionalismo. La primera considera al espacio-tiempo como una cosa dotada de propiedades sustanciales. Esta es la posición sostenida por Newton en los *"Principia"* [99, Escolio a las Definiciones]:

> I. El tiempo absoluto, verdadero y matemático, en sí y por su propia naturaleza sin relación a nada externo fluye uniformemente, y se dice con otro nombre duración.
>
> II. El espacio absoluto, tomado en su naturaleza, sin relación a nada externo, permanece siempre similar e inmóvil.

Actualmente, el representante más importante de esa posición es J. Wheeler, con la creación de la *geometrodinámica* [96].

El relacionalismo, en cambio afirma que el espacio y el tiempo no son cosas sino complejas relaciones entre cosas. En las palabras de Leibnitz, que sostuvo esta posición en su conocida disputa con Newton (mediada por Clarke) [2, p. 273]:

> En cuanto a mi propia opinión, he dicho más de una vez que mantengo que el espacio es algo puramente relativo, como lo es el tiempo; mantengo que es un orden de coexistentes, así como el tiempo es un orden de sucesiones.

Una consecuencia importante de las ideas de Leibnitz es que si el espaciotiempo no es una entidad ontológica primitiva, debe ser posible analizarlo partiendo de entidades ontológicas más elementales. Con más precisión; las relaciones espaciotemporales deben ser definidas a partir de relaciones más fundamentales. Teorías de este tipo han sido desarrolladas por varios autores. Teorías empiristas han sido desarrolladas por Russell [62], Carnap [35] y Basri [5]; y teorías realistas por Bunge y sus colaboradores [16, 22]. Estas teorías están discutidas críticamente en la última referencia.

En las secciones siguientes presentaremos una teoría objetiva y realista del espaciotiempo, basada sobre la referencia [119].

10.1 Tiempo

El análisis de la noción de tiempo, se basa sobre la de cambio ya analizada en el capítulo 9. Vamos a caracterizar el tiempo como una *variable ordenadora*: un parámetro que introduce un orden sobre los estados de una cosa x. Recordemos que existe un orden sobre los *eventos* de una cosa, introducida a través de la definición 9.7. La precedencia de eventos legales, en principio, no es única y puede estar caracterizada por diferentes procesos. El axioma siguiente garantiza la existencia de una única relación de orden parcial sobre una cosa básica:

Axioma 10.1 (Existencia del orden temporal).
Para cada $x \in \mathcal{B}$ existe una única relación de orden

$$s_1 \leq s_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\exists \pi)_L[s_1 = s_i(\pi) \wedge s_2 = s_f(\pi)]$$

La relación que acabamos de definir introduce un único orden temporal sobre el conjunto de estados legales $EstadoL(x)$. Asignemos un nombre a esta importante relación y otras conexas:

Axioma 10.2 (Denotación del orden temporal).
El conjunto de estados legales de x, $S_L(x)$, está ordenado temporalmente *por $\leq$.*

Definición 10.1 (Precedencia temporal).
$s_1 \leq s_2 \stackrel{\text{def}}{=} s_1$ *precede temporalmente* a s_2.

Definición 10.2 (Simultaneidad local).
s_1 *es simultáneo con* $s_2 \stackrel{\text{def}}{=} s_1 \leq s_2 \wedge s_2 \leq s_1$

La relación de orden temporal $\leq$ es de orden parcial: hay estados que no están ordenados por $\leq$. (Por ej., dadas las condiciones iniciales x_0, v_0, hay estados x, v que no son alcanzados por una partícula).

Definición 10.3 (Historia temporal).
Un subconjunto de $S_L(x)$ totalmente ordenado por $\leq$ (una *cadena* de $\langle S_L(x), \leq \rangle$) se llama una *historia temporal* de x: $h_t(x)$.

Los axiomas anteriores no garantizan la unicidad de una historia temporal: como en "El jardín de senderos que se bifurcan" [12, I, 472], permiten (hacen posible) la existencia de varias historias temporales para una cosa. El siguiente axioma elimina esa posibilidad:

Axioma 10.3 (Unicidad de la historia temporal).
Para cada cosa a existe una única historia temporal $h_t(x)$.

Una historia tepmoral es también una historia ontológica (Definición 9.12). Esta última está definida en función de un parámetro $\mathbf{t}$ perteneciente al conjunto de referencia M. Este parámetro no tiene por qué ser continuo, pero el siguiente axioma (una versión muy fuerte del pricipio de Heráclito) garantiza que toda cosa básica cambia con continuidad:

Axioma 10.4 (Continuidad).
Si los estados de una historia temporal se clasifican en dos grupos h_P y h_F, tales que todo estado de h_P precede temporalmente a cualquier estado de h_F, entonces existe un único estado s_0 tal que $s_1 \leq s_0 \leq s_2$. En símbolos:

$$\forall (s_1 \in h_P \subset h) \forall (s_2 \in h_F \subset h)(s_1 \leq s_2) \Rightarrow \exists (s_0)(s_1 \leq s_0 \leq s_2)$$

Y ahora, demos una definición rigurosa del pasado y futuro de un estado dado:

Definición 10.4 (Pasado y futuro).
h_P (h_F) se llaman el pasado (futuro) de s_0.

El pasado y el futuro son, pues, relativos a un estado de referencia s_0.

Teorema 10.1 (Representación real).
Dado un evento unidad $u_\tau = \langle s_0, s_1 \rangle$, *existe una biyección*

$$\mathcal{T} : h \leftrightarrow \Re$$

que parametriza la historia $h_t = \{s(\tau) | \tau \in \Re\}$ *y tal que*

$$s(0) = s_0$$
$$s(1) = s_1$$

Definición 10.5 (Tiempo local).
La variable τ se llama *tiempo local.*

Finalmente, introducimos una última definición:

Definición 10.6 (Duración).
τ es la *duración* del proceso π.

10.2 Espacios Uniformes

Resumiremos aquí las nociones sobre topología que necesitaremos para el desarrollo de la teoría del espacio [15, 82, 136].

10.2.1 Espacios topológicos

Un *espacio topológico* T es un conjunto provisto de una *estructura topológica* o *topología* $\mathcal{T}$ que satisface:

Axiomas de topología:

1. Toda unión de conjuntos de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.
2. La intersección de dos conjuntos de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.
3. $E \in \mathcal{T}$.

Los conjuntos de $\mathcal{T}$ se llaman *abiertos*.

Un *entorno* del punto x es una parte de $E(x) \subset T$ tal que:

$$\exists(V)(V \subset E(x) \wedge x \in V)$$

Una *base de la topología* es una familia de conjuntos $\mathcal{B}_T \subset \mathcal{T}$ tal que:

$$\forall(x \in T \wedge E(x) \subset T)\exists(V \in \mathcal{B}_T)(x \in V \wedge V \subset E(x)$$

Cada $A \in \mathcal{T}$ es una unión de miembros de $\mathcal{B}_T$.

Un espacio topológico satisface el *segundo axioma de numerabilidad* si su topología $\mathcal{T}$ tiene una base numerable.

Definición 10.7 (Espacio separado).
Un espacio topológico T es *separado* (o *de Haussdorf*) si la topología $\mathcal{T}$ satisface el axioma:

$$\forall(x, y \in T)[x \neq y \Rightarrow \exists(U, V \in T)(x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset)] \tag{10.1}$$

10.2.2 Filtros

Un *filtro* sobre un conjunto E es un conjunto $\mathcal{F}$ de partes de E con las siguientes propiedades:

1. Todo conjunto que contiene un conjunto de $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{F}$:

$$\forall v[v \supset (u \in \mathcal{F}) \Rightarrow (v \in \mathcal{F})]$$

2. La intersección de dos conjuntos de $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{F}$.

3. $E \in \mathcal{F}$

4. $\emptyset \notin \mathcal{F}$

Una *base de filtro* $\mathcal{B}_F$ se define en forma análoga a una base de topología:

1. La intersección de dos conjuntos de $\mathcal{B}_F$ contiene otro conjunto de $\mathcal{B}_F$.

2. $\mathcal{B}_F \neq \emptyset \wedge \emptyset \notin \mathcal{B}_F$

Una *base de filtro de Cauchy* es una base de filtro $\mathcal{C}$ que satisface:

$$\forall(V \subset E)\exists(M \in \mathcal{C})[(x,y) \in M \Rightarrow (x,y) \in V] \tag{10.2}$$

10.2.3 Espacios uniformes

Un *espacio uniforme* es un espacio topológico T donde se ha definido una *estructura uniforme* o *uniformidad* $\mathcal{U}$, que satisface:

Axiomas de uniformidad: $\mathcal{U}$ es una relación sobre T: $\mathcal{U} \in T \times T$ tal que:

1. $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U \supset \Delta$, donde $\Delta = \{z \mid z = (x,x)\}$ es la *diagonal* de T.
2. $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}$
3. $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists(V \in \mathcal{U})(V \circ V \subset U)$
4. $\mathcal{U}$ es un filtro sobre $T \times T$.

El axioma (3) es una versión abstracta (y sin la noción de métrica) de la desigualdad triangular en espacios métricos (cf axioma (2) de espacios métricos.

La uniformidad formaliza la noción de "par de puntos próximos". Si $(x,y) \in V$ se dice que "x e y son próximos de orden V".

Una uniformidad define una topología: la topología uniforme. Para mostrarlo, introducimos:

$$\mathcal{V}[x] = \{V \mid V \in \mathcal{U} \wedge x \in V\}$$

que es el *filtro de entornos* de x y define la topología uniforme $\mathcal{T}_U$ sobre T.

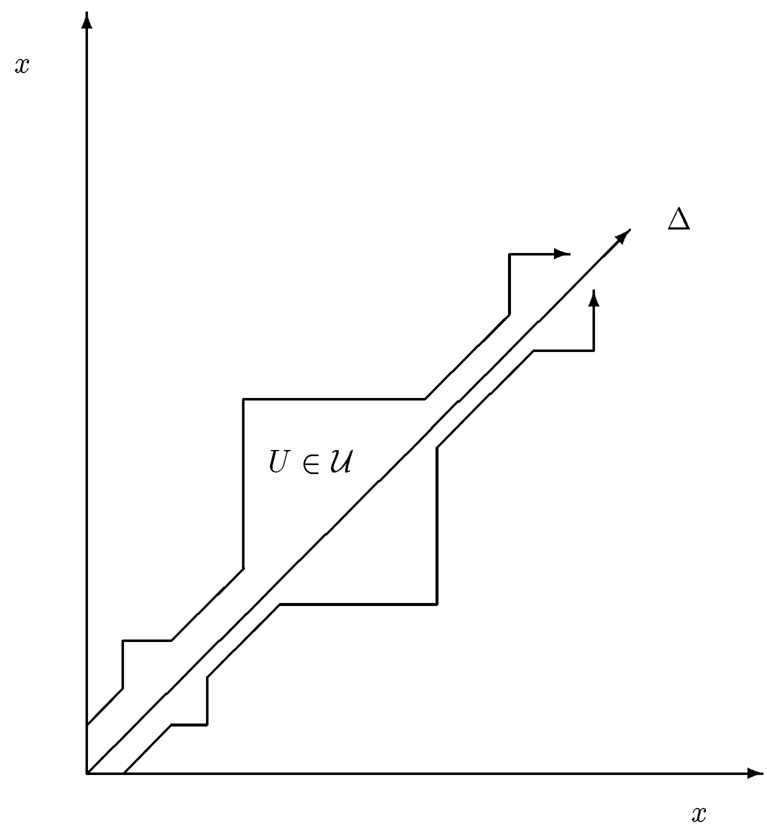
Un espacio uniforme es *separable* si la topología $\mathcal{T}_U$ es separable. La condición necesaria y suficiente de separabilidad es:

$$\Delta = \bigcap U \tag{10.3}$$

Un espacio uniforme es *completo* si todo filtro de Cauchy tiene un punto límite.

Todo espacio uniforme es *completable*: es decir, es posible agregar "elementos ideales" de manera de obtener un espacio completo. El nombre *elementos ideales* es de Kelley [82]. Un nombre más sobrio sería *elementos de la completación*.

Figura 10.1: Estructura uniforme



10.2.4 Espacios métricos:

Una *métrica* sobre un conjunto X es una función $d : X \times X \mapsto \Re$ que satisface:

1. $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$
3. $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$
4. $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

Si solo se satisfacen los tres primeros axiomas, $d : X \times X \mapsto \Re$ se llama una *seudométrica.*

Un conjunto X es un *espacio (seudo)métrico* si admite una (seudo)métrica para cada par de puntos.

Una sudométrica d sobre un conjunto X genera una uniformidad $\mathcal{U}_d$, llamada la *uniformidad generada por d.* En efecto, sea $r > 0 \in \Re$ y sea

$$V_{d,r} = \{\langle x, y \rangle | d(x, y) < r\}$$

El conjunto $\mathcal{V} = V_{d,r}|r > 0$ es una base de la uniformidad $\mathcal{U}$.

Un espacio uniforme satisface una sencilla condición para aceptar una métrica, es decir, para ser *metrizable*:

Teorema de metrización: Un espacio uniforme es metrizable si y sólo si es separable y su filtro de entornos tiene una base numerable.

La condición para admitir una seudométrica es aún más débil [82, Prop. 6.13]:

Teorema de seudometrización: Un espacio uniforme es seudometrizable si y sólo si su filtro de entornos tiene una base numerable.

Todo espacio uniforme metrizado (en realidad, todo espacio métrico) es completable en forma *isométrica*, es decir:

Teorema de completación isométrica: Todo espacio (seudo)métrico es isométrico a un subespacio *denso* de un espacio (seudo)métrico completo.

10.3 Espacio

10.3.1 Estructura uniforme sobre Θ

Mostraremos ahora que la relación de interacción induce una estructura uniforme sobre el conjunto de todas las cosas Θ. Ante todo, observemos que la relación de interacción $\bowtie$ es simétrica pero no es reflexiva (una cosa no interactúa consigo misma $a \not\bowtie a$) ni transitiva ($a \bowtie b \vee b \bowtie c \not\Rightarrow a \bowtie c$). Sin embargo, dada una relación cualquiera R sobre un conjunto C existe la *clausura reflexiva-transitiva* R^* de la relación, que satisface los axiomas siguientes [127]:

Axiomas de clausura RT: 1. $\forall (a \in C)(a\ R^*\ a)$

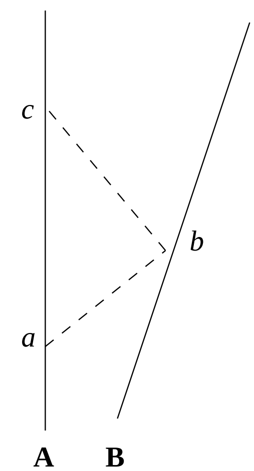
2. $\forall (a, b \in C)(a\ R^*\ b \vee b\ R\ c \Rightarrow a\ R^*\ c)$

La clausura RT de la relación de interacción, $\bowtie^*$ es el conjunto de pares de cosas que interactúan ya sea directamente o por intermedio de una cadena (finita o infinita) de cosas. La misma definición se aplica al conjunto de cosas básicas $\mathcal{B}$. Definimos el conjunto de cosas básicas interactuantes $\mathcal{B}_I$ como:

$$\mathcal{B}_I = \{x \in \mathcal{B} | \exists (y \in \mathcal{B})(x \bowtie^* y)\} \tag{10.4}$$

que, obviamente es una parte de $\mathcal{B}$. Probaremos ahora que $\bowtie^*$ define una estructura uniforme sobre $\mathcal{B}$.

Figura 10.2: Esquema de una acción refleja



Teorema 10.2.
La relación $\bowtie^*$ *define una estructura uniforme sobre* $\mathcal{B}$.

Demostración. Las relaciones de equivalencia definen estructuras uniformes sobre el conjunto de definición [136]. ☐

10.3.2 Caracterización intuitiva del espacio: Acción y reflexión

Para introducir la noción de espacio en nuestra teoría, introduciremos la de *acción refleja* de dos cosas. Intuitivamente, una cosa A actúa sobre otra B si la presencia de A perturba la historia de B. Por lo general, la acción de A sobre B tardará un tiempo en propagarse desde la posición de A hasta la posición de B.

Ahora bien, la acción de una cosa sobre otra tarda un tiempo finito en propagarse. Este hecho puede usarse para construir una teoría relacional del espacio. Nuestro objetivo es definir en primer lugar el espacio *à la Leibnitz,* como el conjunto de cosas equitemporales (que existen simultáneamente), y para ello debemos definir previamente la relación de simultaneidad entre dos estados de dos cosas.

Sean A y B un par de cosas, munidas de sus historias $h(t_A)$ y $h(t_B)$ respectivamente. Supongamos que la cosa A comienza a actuar sobre la cosa B a partir del instante t_A^1. La historia de B se modificará a partir de un instante t_B^0. Con el retardo simple no es posible decir más, porque los tiempos propios (locales) de dos cosas no están relacionados entre sí aún, pero podemos definir la simultaneidad entre dos cosas separadas si consideramos la *acción refleja* de un par de cosas. Para ello, consideremos ahora la acción de la cosa B sobre la cosa A, iniciada a partir de t_B^0. Esta acción modificará la historia de A a partir del instante t_A^2.

Finalmente, llegamos a la relación que nos sirve: "la acción de A, se refleja en B y vuelve a A". Esta *relación de reflexión* es la relación central de nuestra teoría.

Históricamente, Galileo [55] introdujo la reflexión de un pulso luminoso en un espejo como experimento modelo para medir la velocidad de la luz. Esta relación permite definir "simultaneidad a distancia" y distancias [92].

Pasamos a formalizarla.

10.3.3 Formalización

Definamos ahora la *historia de x posterior a t_x^0* como la restricción de la historia de x a tiempos posteriores a t_x^0:

$$h(x, t_x^0) = h(x)|_{t_x > t_x^0} \tag{10.5}$$

y definiciones análogas para $h(y, t_x^0)$ y para la historia de y posterior a t_y^0, en presencia de x después de t_x^0, denotada aquí como $h(\langle y, t_y^0 \rangle, \langle x, t_x^0 \langle)$.

La acción de x sobre y posterior a t_x^1 se define como:

$$\mathcal{A}(y, x^1) = h(y|x) \cap \complement h(\langle y, t_y^0 \rangle, \langle x, t_x^0 \langle) \tag{10.6}$$

y de la misma manera definimos la acción de y sobre x, posterior a t_y^1.

Definamos ahora t_y^0 con la ecuación:

$$t_y^0 = \inf\{t_y | \mathcal{A}(y, x^1)\} \tag{10.7}$$

es decir, el valor mímimo del tiempo local de y para el cual se siente la acción de x posterior a t_x^1. Esta cantidad existe siempre, por ser el cambio de una cosa continuo. De la misma manera, definimos a t_x^2:

$$t_x^2 = \inf\{t_x | \mathcal{A}(x, y^0)\} \tag{10.8}$$

Ahora, finalmente, podemos definir una relación entre los tres instantes involucrados en la acción refleja. Llamaremos $\mathcal{R}(t_x^1, t_y^0, t_x^2)$ a la relación establecida por el conjunto de tripletas ordenadas, definidas a través de las ecuaciones anteriores.

Ahora introduzcamos un hecho experimental: existe una velocidad límite para propagación de la acción. Como no tenemos todavía el espacio y sólo el tiempo local, necesitamos otro camino: si existe una velocidad máxima, el tiempo de ida y vuelta debe tener una cota inferior.

Axioma 10.5 (Retardo de la acción refleja).
Dadas dos cosas básicas $a, b \in \mathcal{B}$ separadas $a \wr b$, existe una cota inferior positiva para el intervalo $t_{A_2} - t_{A_1}$, definido por la relación $\mathcal{R}(t_{A_1}, t_B, t_{A_2})$.

Desde ahora en adelante, trabajaremos con tripletas (t_{A_1}, t_B, t_{A_2}) que cumplan la condición de mínimo.

Definición 10.8 (Simultaneidad).
t_B es simultáneo con $\frac{1}{2}(t_{A_1} + t_{A_2})$

Obviamente, se puede establecer una segunda relación $\breve{\mathcal{R}}$ "emitiendo señales" en B y "reflejándolas" en A. Esta relación es la inversa de $\mathcal{R}$ y ambas establecen una biyección entre t_A y t_B.

Definición 10.9 (Sincronización).
t_A y t_B están sincronizados por la relación de simultaneidad.

La relación de de simultaniedad es reflexiva y simétrica pero en general no es transitiva. En efecto, sean A, B y C tres cosas básicas. Sean $t_{A,B}$ la función de sincronización entre A y B, etc. En general, $t_{b,c} \neq t_{a,c} \circ t_{a,b}^{-1}$. (Ver [92]). En general, el diagrama no conmuta.

Sabemos, sin embargo, que en general puede definirse el *sistema de referencia síncrono* en una clase muy grande de teorías de la gravitación. Postularemos, entonces:

Axioma 10.6 (Transitividad de la simultaneidad).
Dado un conjunto de cosas A_i, existe una asignación de tiempos locales t_i tal que la relación de simultaneidad es transitiva.

La relación de simultaniedad es ahora de equivalencia. La clase de equivalencia es el espacio. (Más precisamente, una sección espacial del espaciotiempo).

Definición 10.10 (Espacio óntico).
La clase de equivalencia de estados simultáneos (de cosas básicas) es el espacio instantáneo óntico E_θ.

Ahora bien, la estructura uniforme que hemos definido sobre el conjunto de todas las cosas unduce una estructura uniforme sobre el subconjunto que forma el espacio instantáneo [136].

Teorema 10.3.
Existe una estructura uniforme sobre el espacio óntico instantáneo E_θ, inducida por la relación de interacción.

10.3.4 Relojes

La relación de sincronización entre dos cosas básicas permite introducir la noción de un reloj:

Definición 10.11 (Reloj).
Una cosa básica x_t se llama un *reloj* si existe una función inyectiva $\psi : \mathbb{S}_{\mathbb{L}}(x_t) \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{L}}(x)$ tal que

$$(\forall t, t')_{\mathbb{S}_{\mathbb{L}}(x_t)}[t \leq t' \Rightarrow \psi(t) \leq \psi(t')]$$

Teorema 10.4 (Tiempo de reloj).
Dado un evento unidad

$$u_t = \langle s_0, s_1 \rangle \in \mathbb{S}_{\mathbb{L}}(x_t) \times \mathbb{S}_{\mathbb{L}}(x_t)$$

, existe una biyección

$$\mathcal{T} : h \leftrightarrow \Re$$

que parametriza la historia $h_t = \{s(t) | t \in \Re\}$ y tal que

$$s(0) = s_0$$
$$s(1) = s_1$$

Finalmente, podemos definir el *tiempo universal* $T \simeq \Re$ como el tiempo propio de una cosa de referencia, que sea un reloj:

Definición 10.12 (Tiempo universal).
El *tiempo universal* $T \simeq \Re$ es el tiempo propio de una cosa de referencia, que sea un reloj.

Teorema 10.5.

$$(\forall a)_\Theta (\exists \psi)[\tau_a = \psi(t_u)]$$

10.4 Geometría

Ahora desarrollaremos la teoría métrica del espacio siguiendo los lineamientos de la referencia [9].

Nuestra primera tarea es introducir la "velocidad de la luz". Puesto que aun no tenemos espacio, tampoco tenemos electromagnetismo y debemos introducirla de manera diferente. Lo haremos a tavés de un axioma:

Axioma 10.7.
c es una constante sin interpretación, con dimensiones de velocidad.

¡Aquí no hay circularidad! La noción de dimensión es matemática y está exactificada por Bunge [19]. En el axioma anterior, "dimensión de velocidad" significa, simplemente, "dimensión de distancia sobre dimensión de tiempo". En realidad, ¡las dimensiones que atribuyamos a c determinarán las de distancia!

10.4.1 Espacio pregeométrico

Nuestra tarea siguiente es transformar a nuestro espacio uniforme en un espacio seudométrico cuya distancia tenga un significado ontológico. Para hacerlo, en primer lugar definimos la distancia entre dos cosas básicas como:

Definición 10.13.

$$d(a,b) \equiv \frac{1}{2}c|t_{a_2} - t_{a_1}|$$

en donde c es una constante sin interpretación y seguimos utilizando la notación de la sección anterior. [1]

¡Pero aún no sabemos si $d(a,b)$ es una seudométrica! (Sólo que es positiva). Por ello necesitamos postular:

Axioma 10.8.
La función $d(a,b)$ es una seudométrica sobre el espacio óntico.

Teorema 10.6.
El espacio óntico O_θ es seudométrico.

El teorema de seudometrización garantiza la existencia de una seudométrica si la base del filtro de entornos es numerable. El teorema anterior implica que esto es lo que ocurre en el espacio óntico.

Pero ahora, vamos a aprovechar que el espacio instantáneo es un espacio uniforme y por lo tanto completable:

Teorema 10.7.
Existe una completación seudométrica del espacio instantáneo.

Llamaremos a los elementos de la completación las "cosas ideales"[2] y al espacio completado *espacio pregeométrico* E_P. Por otra parte, al espacio de las cosas, denso en E_P, lo llamaremos el *espacio óntico* E_θ.

La razón por la que el espacio óntico sólo es seudométrico y no métrico, es que las cosas básicas no tienen, en general, "estados puntiformes": su diámetro euclídeo es finito. El axioma 10.5 sólo garantiza que cosas separadas tienen distancia d positiva. Para recobrar el espacio euclídeo, necesitamos profundizar nuestro estudio del espacio.

10.4.2 Espacio geométrico

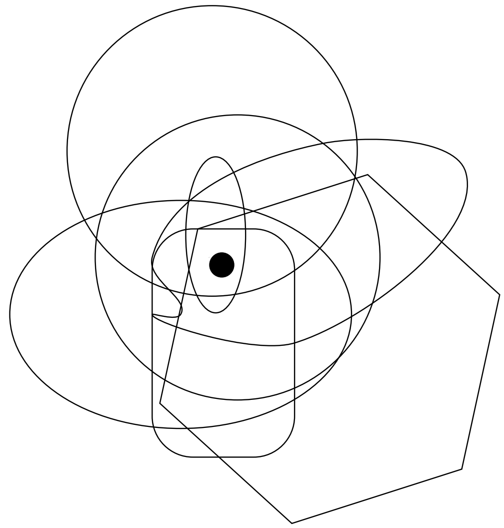
Comenzaremos introduciendo la noción de *puntos ónticos.*

Definición 10.14 (Punto óntico).
Sea $\xi \subset \Theta$ una familia de cosas. Diremos que ξ es una *familia completa de cosas unidas* si se cumple:

[1] En posesión del electromagnetismo, puede *probarse* que c es la velocidad de la luz.

[2] Esto constituye un grosero abuso de lenguaje. Lo usaremos porque "Cosa ideal" es breve, y hace fácil la lectura.

Figura 10.3: Esquema de un punto óntico: la familia de cosas ξ se "cierra" alrededor del punto negro



1. $(\forall x)_{\xi}(\forall y)_{\xi}(x \uplus y)$
2. $(\forall x)_{\complement\xi}(\exists y)_{\xi}(x \wr y)$

La familia ξ se llama un *punto óntico* (Fig. 10.3).

Vamos a mostrar que el conjunto de los puntos ónticos forma un espacio métrico. Primero, una definición:

Definición 10.15 (Distancia entre puntos ónticos).
Sean ξ, η un par de puntos ónticos. Se llama *distancia entre puntos ónticos* a la cantidad:

$$d_G(\xi, \eta) = \sup_{(i,j)} d_p(x_i, y_j)$$

en donde I, J son los respectivos conjuntos de índices.

La figura 10.4 trata de describir intuitivamente como las distancias seudométricas entre las cosas de las dos familias converge a la distancia entre los respectivos puntos ónticos.

Ahora, probaremos que d_G es una métrica:

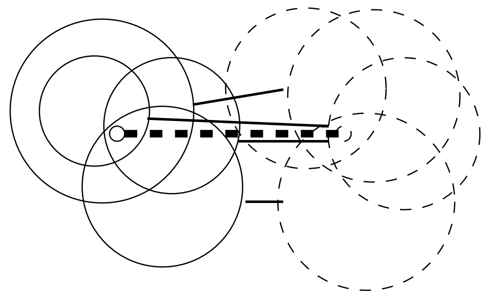
Teorema 10.8.
El conjunto de los puntos ónticos es un espacio métrico con distancia d_G

Demostración. Los tres primeros axiomas de métrica se satisfacen por ser d_P una seudométrica. Para probar que la cuarta condición se satisface, observemos que si $\xi \neq \eta$ existen $x_i \wr y_j$ y, por el axioma 10.5 la distancia óntica entre ellos es positiva y por lo tanto:

$$\xi \neq \eta \Rightarrow d_G(\xi, \eta) > 0$$
$$d_G(\xi, \eta) = 0 \Rightarrow \xi = \eta$$

$\square$

Figura 10.4: Construcción de la distancia entre puntos ónticos



El teorema de completación isométrica garantiza que el espacio de puntos ónticos tiene una completación.

Definición 10.16 (Espacio geométrico).
La completación del espacio de puntos ónticos es el *espacio geométrico*.

10.4.3 Geometría euclídea

Finalmente, necesitamos un grupo de axiomas que garanticen que la estructura del espacio geométrico sea euclídea.

Axioma 10.9.
El espacio satisface (localmente) los axiomas 2, 3, 5', 6' y 7 de Blumenthal.

Una descripción aproximada de los axiomas de Blumenthal es la sigiente:

2 y 3: Dadas dos cosas a y b existe una tercera c alineada con las otras dos.

5': Existen tres cosas no alineadas.

6': Existen cuatro cosas no coplanares.

7: No existe una cuarta dimensión.

La formulación exacta de los axiomas sólo emplea la noción de distancia.

Finalmente, el axioma de completitud (axioma 4 de Blumenthal) merece párrafo aparte:

Teorema 10.9.
El espacio geométrico es completo.

Este teorema matemático, *(Toda sucesión de Cauchy tiene límite)*, que es una consecuencia trivial de la definición, tiene una consecuencia ontológica profunda: implica que existe un *plenum* de cosas (Hipótesis de Leibnitz).

Teorema 10.10.
El espacio geométrico E_G es (localmente) euclídeo.

Teorema 10.11.
El espacio óntico es un plenum.

Obsérvese que no hemos postulado la existencia de un *plenum*: es una consecuencia de que el espacio óntico es denso en E_G. Por otra parte no afirmamos que el espacio óntico es euclídeo: sólo que es denso en un espacio euclídeo. Una sucesión de Cauchy de cosas no tiene, en general, una cosa como límite.

Finalmente, falta un conjunto de axiomas semánticos que fijen la interpretación de E_G (y de E_θ).

Axioma 10.10.
E_G denota espacio físico

10.5 Procesos en el espacio-tiempo

Con el nombre de *protofísica* (o más generalmente, de *protociencia* se conoce la parte de la filosofía exacta que se ocupa de las estructuras generales que aparecen en los enunciados de ley, especialmente cuando se refieren al espacio-tiempo. Examinaremos, en esta sección, algunos de los enunciados generales que se utilizan una y otra vez en la formulación de leyes naturales.

10.5.1 Leyes espaciotemporales

Con las nociones de espacio y tiempo que hemos desarrollado es posible analizar con mucha más profundidad la noción de ley natural. Prácticamente todas ellas pueden formularse usando un sistema de coordenadas cartesianas como dominio de referencia M. Comenzaremos por definir este último con mayor precisión:

Axioma 10.11 (Estructura del dominio de referencia).
El dominio de referencia $M = \mathbb{S}(x_f)$ puede modelarse como el producto cartesiano del espacio euclídeo, del tiempo[3] y de otras propiedades (por ejemplo, las que definen sistemas de unidades):

$$M = \mathbb{S}(x_f) \models E^3 \times T \times \alpha$$

De este modo, todo enunciado de ley puede, en principio, contener una referencia al epaciotiempo, a través del espacio de estados de x_f. Esto no es obligatorio: hay muchos enunciados de ley que no contienen tales referentes:

Ejemplo 10.1 (Ley de Balmer).
La ley de Balmer de frecuencias espectrales:

$$\omega_{mn} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

no contiene referencias espaciotemporales.

Sin embargo, la gran mayoría de las leyes naturales tiene referentes espaciotemporales. Entre ellas, juegan un papel fundamental las que describen procesos. Del análisis de la noción de tiempo, y de las definiciones de proceso (9.6) y de tiempo universal (10.12) deducimos:

Teorema 10.12 (Caracterización de procesos).
Una función de estado $\mathbb{F}$describe un proceso si y sólo si es función no constante del tiempo t.

Una vez elegido el modelo de cosa y el sistema de referencia, el axioma 10.3 garantiza que la historia temporal es una única curva en el espacio de estados, que puede parametrizarse con la variable t.

10.5.2 Descripción de procesos

La descripción de un proceso, aún fijados el modelo de cosa y el sistema de referencia, no es única: existen muchas maneras equivalentes de formular el mismo problema. Dependiendo del modelo hay descripciones más o menos cómodas para trabajar con él. Examinemos algunos ejemplos típicos:

[3] Esta formulación del axioma es suficiente para los propósitos de este texto. No hay inconveniente en extender la formulación a un espacio curvo riemanniano.

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Cuando el espacio de estados tiene una estructura discreta, es posible muchas veces escribir un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que, junto con un conjunto de condiciones iniciales, describen completamente los procesos que tiene lugar en el sistema.

Ejemplo 10.2 (Mecánica newtoniana de partículas).
El espacio de estados es el conjunto de las coordenadas y velocidades, respecto de un sistema de referenica prefijado x_f. En la formulación newtoniana, coordenadas y velocidades no son independientes sino que están conectadas con la definición:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$$

El proceso (movimiento del sistema) está descripto por la ley de movimiento de Newton:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

junto con las condiciones iniciales (circunstancias):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}(t_0) &= \mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

Ejemplo 10.3 (Formulación Hamiltoniana).
En la formulación hamiltoniana de la mecánica, el espacio de estados en una variedad diferenciable, de dimensión $2f$, llamada el *espacio de las fases* $\mathfrak{F}$. El vector de estado $\mathbb{F}$ está formado por f pares de *variables conjugadas* (q_i, p_i). Existe una función de estado:

$$H : \mathfrak{F} \to \Re$$

llamada el *hamiltoniano* del sistema, que contiene una descripción estructural del mismo. Un proceso en un sistema hamiltoniano está caracterizado por las *ecuaciones de Hamilton*:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

junto con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} q_i(0) &= q_{i0} \\ p_i(0) &= p_{i0} \end{aligned}$$

Ejemplo 10.4 (Representación matricial de la ecuación de Schrödinger).
Si el vector de estado de un sistema cuántico se representa en la forma:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_i c_i(t)\,|i\rangle$$

un proceso se representa como la solución de la ecuación diferencial

$$i\hbar\dot{c}_i(t) = \sum_j H_{ij}(t) c_j(t)$$

con condiciones iniciales adecuadas.

Ecuaciones diferenciales parciales

Cuando las propiedades generales del sistema son funciones continuas de las coordenadas, un proceso puede describirse en forma conveniente con ecuaciones diferenciales parciales.

Ejemplo 10.5 (Ecuaciones de Euler para un fluido ideal).
El espacio de estados de un fluido ideal puede describirse con la densidad, la presión y la velocidad en cada punto. Con condiciones iniciales adecuadas, un proceso (flujo) obedece las *ecuaciones de Euler*:

$$\nabla(\rho\mathbf{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)v = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{f}$$

con *condiciones de contorno* adecuadas.

Ejemplo 10.6 (Ecuaciones de Maxwell).
El estado del campo electromagnético puede descrbirse con los potenciales del campo $\langle\mathbf{A},\phi\rangle$, en presencia de fuentes materiales, que se describen con el *cuadrivector corriente* $\langle\mathbf{j},\rho\rangle$. En el *calibrado de Lorentz*:

$$\nabla\mathbf{A} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

los potenciales satisfacen las *ecuaciones de onda*:

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -4\pi\mathbf{j}$$
$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\rho$$

con condiciones iniciales y de contorno adecuadas.

Ecuaciones integrales

La descripción más sofisticada de un proceso se obtiene utilizando *ecuaciones integrales*, que tiene la ventaja de incluir explícitamente las condiciones iniciales y de contorno.

Ejemplo 10.7 (Ecuación de ondas).
Un proceso ondulatorio en el espacio tridimensional puede describirse con la ecuación integral:

$$\phi(\mathbf{r},t) = \phi_0(\mathbf{r},t) + \int dt'd\mathbf{r}'G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\phi(\mathbf{r}',t')$$

Ejemplo 10.8 (Ecuación de Schrödinger-Feynman).
Un proceso en un sistema cuántico simple satisface la *ecuación de Schrödinger-Feynman*:

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi_0(\mathbf{r},t) + \int dt'd\mathbf{r}'K_0(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\psi(\mathbf{r}',t')$$

10.5.3 Causalidad

La palabra "causalidad" tiene acepciones diferentes en filosofía y en ciencia, especialmente en física. En la primera, una "causa" es un evento en una cosa x' que provoca otro evento en otra cosa x. Con más precisión:

Definición 10.17 (Causa eficiente).
Sea $e \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(x)$ un evento de la cosa x y $e' \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(x')$ un evento en la cosa x'. Decimos que e' es la *causa* de e si se satisfacen las condiciones:

Antecedencia: $t \geq t'$

Acción: $e \in \mathrm{Ac}(x', x)$

Esta definición es muy general y se aplica a un gran número de sistemas, pero hay limitaciones muy claras a los sistemas en que es aplicable.

Ejemplo 10.9 (Circuito RC).
En un circuito RC la causa de la carga del condensador es la aplicación de un voltaje.

Ejemplo 10.10 (Inercia).
El movimiento rectilíneo y uniforme con respecto de un sistema de referencia inercial, no tiene causa.

Ejemplo 10.11 (Caída de los cuerpos).
La noción intuitiva de causa en ambigua: suelto una piedra y cae. ¿Es la causa de la caída el campo gravitacional o el acto de soltar la piedra? De acuerdo con la definición anterior, la causa es el campo gravitacional.

La noción de causa es muy especialmente útil en los *sistemas lineales* [137]:

Definición 10.18 (Sistema lineal).
Un sistema se llama lineal si:

1. Su espacio de estados $\mathbb{S}_{\mathbb{L}}$ es un espacio vectorial con elementos $xi(t)$.

2. El estado en el tiempo t es una función lineal del estado inicial:

$$\xi(t) = U(t, t_0)\xi(t_0)$$

   en donde U se llama el *núcleo de evolución* del sistema. El sistema se llama *temporalmente homogéneo* si $U(t, t') = U(t - t')$.

3. La acción total del medio ambiente puede representarse con una transformación lineal sobre una función de fuente $f(t)$:

$$\xi_f = \int_{-\infty}^{\infty} H(t, t') f(t') dt'$$

   en donde H se llama la *función de transferencia* del sistema. En un sistema temporalmente homogéneo se cumple $H(t, t') = H(t - t')$.

Limitémonos a sistemas temporalmente homogéneos, donde los resultados son simples e importantes.

Teorema 10.13 (Evolución y transferencia de un sistema lineal).

1. *El operador de evolución de un sistema lineal temporalmente homogéneo satisface la ecuación diferencial:*

$$\frac{dU(t)}{dt} = AU(t)$$
$$U(0) = I$$

en donde $A = \dot{U}(0)$ *es un operador lineal (matricial) constante.*

2. *La función de transferencia de un sistema* causal *es igual a:*

$$H(t) = U(t)\Theta(t) \tag{10.9}$$

en donde Θ *designa la función escalón de Heaveside:*

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Definición 10.19 (Funciones causales).
Una función que se anula sobre el semieje negativo:

$$h(t) = g(t)\Theta(t)$$

se llama una *función causal.*

La propiedad fundamental de los sistemas lineales homogéneos está enunciada en los dos teoremas siguientes:

Teorema 10.14 (Analiticidad y causalidad).
La transformada de Fourier de una función causal

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{i\omega t}$$

es anaítica en el semiplano superior $\Im\omega \geq 0$.

Teorema 10.15 (Relaciones de dispersión).
Las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier de una función causal

$$H(\omega) = F(\omega) + iG(\omega)$$

satifacen relaciones de dispersión*:*

$$F(\omega) = \frac{\mathrm{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$
$$G(\omega) = -\frac{\mathrm{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

en donde P *simboliza el valor principal de la integral.*

Estos resultados tienen consecuencias importantes en varios campos de la ciencia, donde los sistemas lineales juegan un papel preponderante.

- En primer lugar, si la función de transferencia no es una "delta de Dirac", $F(\omega)$ no es constante y, en general, $G(\omega) \neq 0$. Puesto que, por lo general, $G(\omega)$ representa pérdida de energía (o de otra propiedad), los sistemas lineales tienen, por lo general, perdidas no triviales. Estos sistemas se llaman *sistemas disipativos.*

- La parte real $F(\omega)$ se llama "parte reactiva" de la función de transferencia y por lo general representa la capacidad del sistema linal de almacenar energía (o alguna otra propiedad). El teorema 10.15 muestra que disipación y reactividad están conectadas legalmente.

Cuando los sistemas no son lineales, la noción de causalidad se hace difusa: el sistema reacciona en forma no trivial sobre el ambiente y la relación entre ambos no puede describirse con una función de transferencia. La descripción de procesos en esos sistemas se hace mejor abandonando la noción de causalidad.

10.5.4 Determinismo

Puesto que la noción de causalidad no caracteriza completamente la evolución temporal en los sistemas reales, introduciremos otra noción que sí lo hace.

Definición 10.20 (Proceso determinista).
Diremos que un proceso π es *determinista* si cualquier estado π_k está determinado en forma única por el estado inicial π_0. Por abuso de lenguaje, *sistema determinista* a uno que evoluciona en el tiempo a través de un proceso determinista.

Ejemplo 10.12 (Campo electrostático).
Un campo electrostático es determinista. Pese a la falta de cambio (se trata, obviamente, de un proceso trivial), este resultado no es trivial: la unicidad de la solución depende de las condiciones de contorno [132].

Ejemplo 10.13 (Partícula clásica).
El movimiento de una partícula clásica, cuyo espacio de estados se represente con el plano $X \times P$, se describe con un proceso que obedece la ecuación diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x,t)$$

El teorema de existencia y unicidad de la solución de ecuaciones diferenciales [103, § 104-105] garantiza que cada estado sucesivo $\langle x(t), p(t)\rangle$ está determinado únicamente por el estado inicial $\langle x(0), p(0)\rangle$.

Ejemplo 10.14 (Cuantón).
La evolución temporal de un cuantón[4] está descripta por la ecuación de Schr$\stackrel{\text{o}}{-}$dinger dependiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(x,t) + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

Nuevamente, el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales permite afirmar la unicidad de los estados sucesivos $\Psi(x,t)$.

Que un proceso sea o no determinista depende de la teoría que se utilice para describirlo, pues la elección del espacio de estados del sistema juega un papel esencial en la unicidad de la descripción.

Ejemplo 10.15 (Partícula browniana).
Una partícula browniana puede describirse con (al menos) dos espacios de estados diferentes: el plano $\mathbb{S}_C = X \times P$ o el espacio de estados probabilístico $\mathbb{S}_P = \mathcal{Q}$, en donde $\mathcal{Q} = \{F | F : \mathcal{P}(\mathbb{S}_C) \to [0,1]\}$ que asigna una densidad de probabilidad $P(x,p)$ a cada punto de $\mathbb{S}_C$.

[4] Este sustantivo, que carece de la connotación clásica que tiene el sustantivo "partícula", parece preferible a la locución usual "partícula cuántica".

En el primer caso, la evolución se describe con la *ecuación de Langevin*:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} = f_e(t)$$

en donde f_e representa una fuerza aleatoria. La evolución, en este caso, es indeterminista: las condiciones iniciales no determinan unívocamente el estado final.

En el segundo caso, el la evolución del sistema se describe con la *ecuación de Fokker-Planck*[5]:

$$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} = D\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}$$

y la evolución es determinista.

El determinismo es pues, relativo a un contexto: depende de la estructura semántica del mismo. No es, ne cambio, subjetivo: no depende del ser consciente que desarrolle, estudie o aplique la teoría.

10.5.5 Irreversibilidad

La irreversibilidad de un proceso es otra noción ontológica importante, pues da una defineión rigurosa de la noción vaga de *la flecha del tiempo*. Y es ontológica, pues no sólo procesos físicos, sino también químicos, biológicos y mentales son irreversibles: recordamos el pasado pero no el futuro [83, pag. 5]:

> *Puesto que ignoras lo que te reserva el mañana,*
> *procura ser feliz hoy.*
> *Coge un cántaro de vino, siéntate a la luz de la luna*
> *y bebe pensando que mañana quizás la luna te busque en vano.*

Combinada con la noción de determinismo, en la irreversibilidad está el doloroso descubrimiento de Heráclito [12, v. II, p. 149]:

> Nuestro destino ... no es espantoso por irreal; es espantoso porque es irreversible y de hierro ... El mundo, desgraciadamente, es real; yo, desgraciadamente, soy Borges.

Sin embargo, el análisis de la irreversibilidad no surge del análisis del tiempo que hemos llevado a cabo. Las nociones de espacio y tiempo introducidas permiten la existencia de procesos reversibles y de hecho, muchos de los procesos microscópicos lo son. Puesto que ninguna de las nociones anteriormente analizadas define regurosamente la irreversibilidad, introduciremos una definición ahora:

Definición 10.21 (Procesos reversibles e irreversibles).
Sea $\pi(x) = \langle \mathbb{F}(t)|t\rangle$ un proceso legal sobre la cosa x y sea $\bar{\pi} = \langle \mathbb{F}(\bar{t})|\bar{t} = -t\rangle$ el proceso "invertido temporalmente". Diremos que π es *reversible* si y sólo si $\bar{\pi}$ es legal. En caso contrario, el proceso se llama *irreversible*.

Ejemplo 10.16 ("Flecha termodinámica del tiempo").
Todo proceso en un sistema σ donde crezca la entropía:

$$\forall(t' > t)\,[S_\sigma(t') > S_\sigma(t)]$$

es irreversible.

Ejemplo 10.17 ("Flecha biológica del tiempo").
Todo proceso en un sistema biológico σ que involucre especiación es irreversible.

[5] Nos limitamos al caso de Wiener, en donde $t \gg \frac{\lambda}{m}$

Ejemplo 10.18 ("Flecha psicológica del tiempo").
Todo proceso mental (que identificamos con procesos neuropsíquicos) es irreversible.

En la definición 10.21 hemos aplicado la condición de inversión temporal al proceso, no a las leyes que lo describen. Esto se debe a que las leyes pueden ser invariantes bajo inversión temporal, pero el proceso no serlo: las circunstancias (en la forma de condiciones de contorno, por ejemplo) deben ser las adecuadas.

Ejemplo 10.19 (Radiación).
Las ecuaciones de Maxwell, que describen el campo electromagnético, son invariantes bajo inversión temporal. Sin embargo, en el estudio de la radiación se impone la *condición de antecedencia* que da origen a los *potenciales retardados*. Esos últimos implican la condición de onda saliente (o condición de Sommerfeld) en el infinito. Y esta última implica que el proceso es irreversible: la energía fluye continuamente desde la antena hacia el exterior.

Ejemplo 10.20 (Reacciones químicas).
En condiciones de "vaso cerrado", reacciones químicas tales como

$$2\mathrm{H_2O} \leftrightarrow 2\mathrm{H_2} + \mathrm{O_2}$$

son reversibles, pero si se deja escapar el gas ...

En particular, el ejemplo 10.20 muestra que no es necesario que crezca la entropía en un sistema para que el proceso sea irreversible.

10.5.6 Evolución

La evolución biológica es el ejemplo típico de procesos evolutivos: la adaptación de un sistema a un ambiente. Estos proceso, en apariencia sencillos, son el resultado de una compleja interacción entre el sistema y su ambiente. La propiedad que guía la evolución es la *selección* de indivuduos del sistema.

Intuitivamente, el ambiente selecciona individuos de un sistema, eliminándolos antes de que puedan reponerse. La selección conduce a la eliminación de unas clase natural y a la persistencia de otras (Cf. Sección 8.3.2). Comenzaremos por dar definiciones rigurosas de esta propiedad.

Definición 10.22 (Selección).
Sea σ un sistema, de composición $C = \mathcal{C}(\sigma)$, y ambiente $A = \mathcal{A}(\sigma)$. Diremos que A *selecciona* a los componentes de σ si existe una función

$$I_S : C \times A \times T \to C$$

tal que

$$I_S(C, A, t + \Delta t) \subset C(t)$$

Diremos también que el ambiente ejerce una *presión selectiva* sobre σ.

La definición de selección que acabamos de dar es lo suficientemente general como para aplicarse a fenómenos muy generales, en condiciones muy diferentes. En particular, la función I_S puede ser una propensión (resultado de un proceso aleatorio) y representarse con una variable aleatoria.

Ejemplo 10.21 (Nucleosíntesis primordial).
Durante la nucleosíntesis primordial, las fracciones de los elementos livianos $^1(H),^2(H),^3(He),^4(He)$ y $^7(Li)$ dependen de la selección por el medio (las secciones eficaces de destrucción dependen de la temperatura).

Ejemplo 10.22 (Selección química: experimento de Miller-Urey).
En un sistema químico con una composición similar a la de la atmósfera terrestre primitiva, sobreviven a las condiciones moléculas bioquímicas.

Ejemplo 10.23 (Selección biológica).
Un ambiente ecológico dado ejerce una presión selectiva fuerte sobre las especies biológicas. La presión es lo suficientemente fuerte como para que generalmente sobreviva una única especie por nicho ecológico.

Un segundo ingrediente importante de un proceso evolutivo es la formación de nuevos individuos. En forma análoga definimos:

Definición 10.23 (Producción).
Sea σ un sistema, de composición $C = \mathcal{C}(\sigma)$, y ambiente $A = \mathcal{A}(\sigma)$. Se llama *función de producción*

$$I_P : C \times A \times T \to C$$

tal que

$$I_P(C, A, t + \Delta t) \supset C(t)$$

Finalmente, estamos en condiciones de definir la noción de adaptación:

Definición 10.24 (Adaptación).
Un sistema *sigma* está *adaptado* a su ambiente A si no hay presión selectiva (es decir, $I_S \circ I_P = I$, la identidad). Es decir: las pérdidas se compensan con la (re)producción.

Puesto que los ambientes cambian (por lo general lentamente), la noción de adaptación es relativa: una especie dada está adaptada (más o menos bien) durante un cierto intervalo.

Finalmente, podemos definir un proceso evolutivo:

Definición 10.25 (Proceso evolutivo).
Sea σ un sistema, de composición $C = \mathcal{C}(\sigma)$, y ambiente $A = \mathcal{A}(\sigma)$. Diremos que es sistema obedece (o sufre) un proceso evolutivo $\pi(\sigma)$ si éste puede describirse como una sucesión de cambios por selección y producción.

Ejemplo 10.24 (Ecuación logística).
El modelo más sencillo de crecimiento de una población animal está descripto por la *ecuación logística* [130, 41]. Sea $N(t)$ el número de individuos de una población homogénea σ. Llamemos r a la tasa intrínseca de crecimiento de la población y K al número máximo de individuos que puede soportar el ambiente. Si suponemos que la tasa de crecimiento efectiva de la población está limitada por el ambiente $r_{ef} = r(1 - N/K)$, la dinámica de la población está descripta por la ecuación logística:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Ejemplo 10.25 (Competencia entre especies).
Con la misma notación que en el ejemplo anterior, sean r_1, r_2 las tasas de crecimiento de ambas especies y K_1, K_2 los respectivos límtes de población. Supondremos que cada especie compite con la otra limitando su crecimiento. Podemos introducir "números de ocupación efectivos" en la forma:

$$\begin{aligned} N_{1ef} &= N_1 + \alpha N_2 \\ N_{2ef} &= N_2 + \beta N_1 \end{aligned}$$

y con un razonamiento análogo obtenemos las ecuaciones de crecimiento de la población:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha \frac{N_2}{K_1}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \beta \frac{N_1}{K_2}\right)$$

La evolución es un proceso creativo: los individuos sobrevivientes $x \sqsubseteq I_S(\sigma)$ pueden poseer propiedades que precedan a nuevas propiedades emergentes del sistema. Éste es el proceso de especiación, que genera nuevos sistemas a partir de los anteriores.

10.5.7 Teleología

Los procesos evolucionarios generan nuevos sistemas (provistos de nuevas propiedades emergentes) a través de una sucesión de eliminaciones, supervivencia y mutaciones. Otro tipo importante de procesos son los procesos dirigidos a un objetivo, llamados *teleológicos*. No daré (en esta versión del curso) una definición formal de teleologá (que requiere un análisis ontológico de la noción de *propósito*). Me limitaré a examinar algunos ejemplos de interpretación teleológica legítimos e ilegítimos. Una crítica de la teleolgía puede verse en [25, Cap. 5] y una historia y defensa de la misma en [4].

Ejemplo 10.26 (Formulación lagrangeana de la mecánica).
La mecánica clásica de sistemas conservativos puede formularse en una forma que recuerda a un proceso teleológico. Sean $x_0(t_0)$ la posición inicial de un movimiento y $x_1(t_1)$ la posición final. Sea $L(x, \dot{x}, t) = T - V$ el lagrangeano del sistema: la diferencia entre la energía cinética y potencial, considerada como función de la posición x, la velocidad $\dot{x}$ y el tiempo. El *principio de mínima acción* de Hamilton afirma que la acción del sistema

$$S(x_1, t_1, x_0, t_0) = \int_{x_0(t_0)}^{x_1(t_1)} L(x, \dot{x}, t) dt$$

debe ser mínima para la trayectoria real del sistema que pasa por los puntos $x_0(t_0)$ y $x_1(t_1)$. El mínimo debe buscarse entre todas las trayectorias que pasan por dichos puntos.

Aunque la formulación aparenta ser teleológica, el principio de mínimo conduce a las *ecuaciones de Euler-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

con condiciones iniciales. No se trata, pues de una formulación teleológica: no hay ningún propósito en la trayectoria. La mecánica clásica no contiene los predicados para introducir la noción de propósito.

Ejemplo 10.27 (Predadores).
Los mamíferos predadores (especalmente los carnívoros) realizan maniobras *para* cercar a su presa: el proceso de caza, en estos casos, es un proceso teleológico.

Ejemplo 10.28 (Evolución biológica).
La evolución biológica no es teleológica. El proceso de especiación se produce al azar, a través de la "supervivencia del más apt"; es decir, de los organismos mejor adaptados a un ambiente y capaces, por ello, de producir mayor descendencia. El mecanismo es tan eficaz que la adaptación de los organismos es prácticamente

perfecta y "producen la impresión" (en el científico o el filósofo) de "haber sido creados para ocupar ese nicho ecológico".

Voltaire se burló cruelmente de la teleología, especialmente en la forma propuesta por Leibnitz:

> Pangloss enseñaba la metaforicoteleologocosmolonigología ...
>
> —Está demostrado —decía (Pangloss)— que las cosas no pueden ser de otra forma, pues, estando todo hecho para un fin, todo se lleva a cabo necesariamente para un mejor fin. Fijaos en que la nariz existe para llevar gafas; por esta razón existen las gafas.

Pero mucho antes que Voltaire y Darwin, Lucrecio había advertido el error de suponer un fin para la evolución orgánica:

> En estas cuestiones anhelamos que escapes con prontitud de ... aquel error de hallar un fin en la lumbre de los ojos, para poder mirar ... Estas y otras interpretaciones trastocan el orden de causas y efectos; nada ha surgido en el cuerpo en vista de un uso posible ... No se dio, en efecto, el ver antes de nacer la lumbre de los ojos ...

Ejemplo 10.29 (El Principio Antrópico).
En la cosmología moderna, Carter [4, Sec. 1.2] introdujo una proposición teleológica, conocida como el

Principio Antrópico Fuerte: El Universo debe tener aquellas propiedades que permitan a la vida desarrollarse en él durante alguna etapa de su historia.

Una forma más débil del mismo principio, debida a Dicke, es el

Principio Antrópico Débil : El Universo que observamos es grande y viejo porque contiene vida inteligente.

Esta última afirmación es razonable: la emergencia de vida inteligente (o aún metazoica) capaz de observar el Universo lleva un largo tiempo. En las teorías actuales, eso puede lograrse solamente si el Universo es "grande" (próximo al *Universo de Einstein-deSitter*). Sin embargo, no aporta ninguna información sustancial: el requerimiento de concordar con la observación basta para seleccionar el modelo correcto.

El Principio Antrópico Fuerte, por otra parte, es genuinamente teleológico ... e incosnsistente con la cosmología relativista, que no contiene predicados capaces de expresar la noción de "vida inteligente". Es una proposición especulativa, que debería analizarse en un contexto cerrado, provisto de predicados y axiomas adecuados: la noción de vida inteligente presupone las nociones de mente, sistema nervioso central, fisiología ... que no están incluídas en ninguan de las formulaciones corrientes de la cosmología, incluídas aquellas que "incluyen" al Principio Antrópico como una de sus proposiciones.

Parte IV

Gnoseología

Parte V

Epistemología

Bibliografía

[1] W. Ackermann. Zur axiomatik der mengenlehre. *Math. Annalen*, 131:336, 1956.

[2] H. G. Alexander. *Leibniz-Clarke Correspondence.* Manchester University Press, 1983.

[3] Arquímedes. *El "Método"*. EUDEBA, Buenos Aires, 1966.

[4] John D. Barrow and Frank J. Tipler. *The Anthropic Cosmological Principle.* Oxford University Press, London, 1989.

[5] Saul A. Basri. *A deductive theory of space and time.* Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland Publishng Company, Amsterdam, 1973.

[6] Gabriel Baum. *Complejidad.* Editorial Kapelusz S. A., Buenos Aires, 1987.

[7] Evert W. Beth. *The foundations of mathematics.* Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland Publishng Company, Amsterdam, 1959.

[8] Garrett Birkhoff and Saunders MacLane. *Álgebra Moderna.* Editorial Teide, Barcelona, 1960.

[9] L. M. Blumenthal. *Geometría Axiomática.* Aguilar, 1965.

[10] Guillermo Boido. *Noticias del Planeta Tierra.* A-Z editora, Buenos Aires, 1996.

[11] Jorge Luis Borges. *El Golem*, page 263. Volume 2 of [12], 1989.

[12] Jorge Luis Borges. *Obras Completas.* Emecé Editores, S. A., Barcelona, España, 1989.

[13] Jorge Luis Borges and Margarita Guerrero. *El libro de los seres imaginarios.* Editorial KIER, Buenos Aires, Argentina, 1967.

[14] N. Bourbaki. *Théorie des ensembles.* Éléments de mathématique. Hermann, Paris, 1960.

[15] N. Bourbaki. *Topologie Générale, Fascicule de résultats.* Hermann, Paris, 1964.

[16] M. Bunge and A. García Máynez. A relational theory of physical space. *Int. J. Theor. Phys.*, 16:1, 1977.

[17] Mario A. Bunge. *Causalidad.* Eudeba, Buenos Aires, 1965.

[18] Mario A. Bunge. *Foundations of physics.* Springer, Berlin, 1967.

[19] Mario A. Bunge. A mathematical theory of the dimensions and units of physical quantities. In Mario A. Bunge, editor, *Problems in the foundation of physics*, page 1, 1971.

[20] Mario A. Bunge. *Semantics I: Sense and Reference*. Treatise of Basic Phylosophy. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1974.

[21] Mario A. Bunge. *Semantics II: Interpretation and Truth*. Treatise of Basic Phylosophy. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1974.

[22] Mario A. Bunge. *Ontology I: The furniture of the World*. Treatise of Basic Phylosophy. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1977.

[23] Mario A. Bunge. *Ontology II: A world of systems*. Treatise of Basic Phylosophy. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1979.

[24] Mario A. Bunge. *La investigación científica: su estrategia y su filosofía*. Editorial Ariel, Barcelona, 1981.

[25] Mario A. Bunge. *Materialismo y Ciencia*. Editorial Ariel, Barcelona, 1981.

[26] Mario A. Bunge. *Epistemology I: Exploring the world*. Treatise of Basic Phylosophy. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1983.

[27] Mario A. Bunge. *Epistemology II: Understanding the world*. Treatise of Basic Phylosophy. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1983.

[28] Mario A. Bunge. *Epistemology III: Philosophy of Science*. Treatise of Basic Phylosophy. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1985.

[29] Mario A. Bunge. *El problema mente-cerebro: Un enfoque psicobiológico*. Editorial Tecnos, S. A., Madrid, 1988.

[30] Mario A. Bunge. *Ethics: The good and the right*. Treatise of Basic Phylosophy. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1989.

[31] Mario A. Bunge. *Análisis de la analiticidad*. 1990.

[32] Rudolf Carnap. *Introduction to symbolic logic and its applications*. Dover, New York, 1958.

[33] Rudolf Carnap. *Introduction to semantics and the formalization of logic*. Harvard University Press, Cambridge, Massachussets, 1959.

[34] Rudolf Carnap. *Meaning and Necessity: A study in semantics and modal logic*. The University of Chicago Press, Chicago, 1960.

[35] Rudolf Carnap. *The logical structure of the World*. University of California Press, Berkeley & Los Angeles, 1967.

[36] Rudolf Carnap. *An introduction to the philosophy of science*. Dover, New York, 1995.

[37] Noam Chomsky. *El lenguaje y el entendimiento*. Planeta-Agostini, Barcelona, 1992.

[38] Alonzo Church. *Introduction to mathematical logic*. Princeton University Press, 1956.

[39] Horacio E. Cingolani and Alberto B. Houssay, editors. *Fisiología Humana de Bernardo A. Houssay*. Librería Editorial "El Ateneo", Buenos Aires, 6ª edition, 1994.

[40] M. Cohen and E.Ñagel. *Introducción a la lógica y al método científico*. Amorrortu editores, Buenos Aires, 1968.

[41] Paul Colinvaux. *Introducción a la ecología*. LIMUSA, México, 1980.

[42] Irving M. Copi. *Introducción a la lógica*. Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1978.

[43] G. M. Covarrubias. An axiomatization of general relativity. *Int. J. Theor. Phys.*, 32:2135, 1993.

[44] Haskell B. Curry. *Foundations of mathematical logic*. Dover Publications, Inc., New York, 1977.

[45] B. A. Davey and H. A. Priestley. *Introduction to lattices and order*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[46] Ferdinand de Sassure. *Curso de lingüística general*. Losada, Buenos Aires, 1959.

[47] Baruch de Spinoza. *Ética, demostrada según el orden geométrico*. Acervo Cultural / Editores, Buenos Aires, 1977.

[48] Círculo de Viena, editor. *Crisis y reconstrucción de las ciencias exactas*. Universidad Nacional de La Plata, La Plata, Argentina, 1936.

[49] Real Academia Española. *Esbozo de una nueva gramática de la lengua española*. Espasa-Calpe, Eds, Madrid, 1973.

[50] Abraham A. Faenkel, Yehoshua Bar-Hillel, and Azriel Levy. *Foundations of set theory*. Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland Publishng Company, Amsterdam, 1973.

[51] Paul K. Feyerabend. *Contra el Método: esquema de una teoría anarquista del conocimiento*. Ediciones Orbis S. A., Buenos Aires, 1984.

[52] Gottlob Frege. *Estudios sobre semántica*. Ediciones Orbis S. A., Buenos Aires, 1984.

[53] H. Freudenthal. *Las matemáticas en la vida cotidiana*. McGraw-Hill - Ediciones Guadarrama, Madrid, 1967.

[54] Augusto Furlan. La deducción natural. Edición del autor, Córdoba - Argentina, 1965.

[55] Galileo Galilei. *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. Editorial Losada, Buenos Aires, 1945.

[56] Galileo Galilei. *Opere*. U. Tipografica - Editrice Torinese, Torino, 1964.

[57] George Gamow. *Bigrafía de la Física*. Revista de Occidente, Madrid, 1962.

[58] A. V. Glagkij and I. A. Mel'čuk. *Introducción a la lingüística matemática*. Planeta, Barcelona, 1972.

[59] B. Gnedenko. *The theory of probability*. MIR, Moscú, 1973.

[60] Robert Goldblatt. *Topoi : The categorical analysis of logic.* North-Holland, Amsterdam, revised edition, 1986.

[61] Robert Graves. *Los Mitos Griegos.* Alianza Editorial, Madrid, 1993.

[62] Alexander J. Gunn. *El problema del tiempo.* Jorge Luis Borges. Biblioteca personal. Hyspamérica, Madrid, 1986.

[63] Arthur C. Guyton. *Corteza cerebral y funciones intelectuales del cerebro*, chapter 61, page 764. In [64], 4ª edition, 1971.

[64] Arthur C. Guyton. *Tratado de fisiología médica.* Interamericana, México, 4ª edition, 1971.

[65] Michel Habib. *Bases neurofisiológicas de la conducta.* Masson, 1992.

[66] Armando M. Haeberer, Gabriel Baum, and Paulo A. S. Veloso. Hacia un metamodelo del proceso de desarrollo de software. Publicación interna de ESLAI, 1985.

[67] Armando M. Haeberer, Gabriel Baum, and Paulo A. S. Veloso. Towards an algebraic theory of problems. Publicación interna de ESLAI, 1985.

[68] W. A. Heidel. *La edad heroica de la ciencia.* Espasa - Calpe Argentina, S. A., Buenos Aires, 1946.

[69] Carl G. Hempel. *Aspects of scientific explanation and other essays in the philosophy of science.* The Free Press, New York, 1970.

[70] Parménides - Heráclito. *Fragmentos.* Ediciones Orbis, S. A., Barcelona, 1983.

[71] Hesíodo. *Teogonía y otros textos.* Centro Editor de América Latina, Buenos Aires, 1984.

[72] D. Hilbert and W. Ackerman. *Principles of mathematical logic.* Chelsea Publishing Company, New York, 1950.

[73] David Hilbert. *Fundamentos de Geometría.* Instituto de Matemáticas "Jorge Juan", Madrid, 1953.

[74] Douglas R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: un Eterno y Grácil Bucle.* Tusquets Editores y CONACYT, Barcelona, España y México, 1992.

[75] Homero. *La Odisea.* Editorial Losada, Buenos Aires, 1938.

[76] Homero. *La Ilíada.* Editorial Losada, Buenos Aires, 1977.

[77] R. I. G. Hughes. Quantum logic. 245(4):146, 1981.

[78] Iván Izquierdo. *Aprendizaje y memoria*, chapter IX, 20, pages IX, 311. Volume 4 of Cingolani and Houssay [39], 6ª edition, 1994.

[79] Max Jammer. *The philosophy of quantum mechanics.* John Wiley & Sons, New York, 1974.

[80] James Jeans. *Historia de la Física.* Fondo de Cultura Económica, México, 1960.

[81] Edward Kasner and James Newman. *Matemáticas e Imaginación.* Compañía Editorial Continental, Mexico, 1957.

[82] John L. Kelley. *Topología General*. Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1962.

[83] Omar Khayyám. *Rubáiyát*. Kraft, Buenos Aires, 1952. Versión española de Félix E. Etchegoyen, según la traducción francesa de Franz Toussaint.

[84] Stephen Cole Kleene. *Introduction to metamathematics*. North Holland Publishing Co., Amsterdam, Holland, 1952.

[85] Gregorio Klimovsky. *Las desventuras del conocimiento científico: Una introducción a la epistemología*. A-Z editora, Buenos Aires, 1994.

[86] G. T. Kneebone. *Mathematical logic and the foundation of mathematics*. D. van Nostrand, London, 1963.

[87] Donald E. Knuth. *Fundamental algorithms*. The art of computer programming. Addison-Wesley, Reading, Massachussets, second edition, 1975.

[88] Arthur Koestler. *Los sonámbulos*. EUDEBA, Buenos Aires, 1963.

[89] Thomas S. Kuhn. *The Structure of Scientific Revolutions*. The University of Chicago Press, Chicago, second edition, 1960.

[90] Thomas S. Kuhn. *La revolución copernicana*. Planeta - Agostini, Barcelona, 1993.

[91] Diógenes Laercio. *Vidas de los filósofos más ilustres*. Editorial Porrúa, S. A., México, 1991.

[92] L. Landau and S. Lifshitz. *Théorie du Champ*. MIR, Moscú, 1967.

[93] Lucrecio. *Naturaleza de las cosas*. Editorial Andes, La Plata, 1959.

[94] Saunders MacLane and Garrett Birkhoff. *Algebra*. The MacMillan Company, London, 1970.

[95] Marvin L. Minsky. *Computation: finite and infinite machines*. Prentice-Hall, Englewood, 1967.

[96] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.

[97] Rodolfo Mondolfo. *El pensamiento antiguo*. Editorial Losada S. A., Buenos Aires, 1958.

[98] Jacques Monod. *El azar y la necesidad: Ensayo sobre la filosofía natural de la biología moderna*. Planeta-Agostini, Barcelona, 1993.

[99] Isaac Newton. *Mathematical Principles of Natural Phylosophy*. U. of California Press, Berkeley, 1946.

[100] Lía Oubiña. *Introducción a la teoría de conjuntos*. Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1974.

[101] J. R. Partington. *Historia de la Química*. Espasa - Calpe Argentina, S. A., Buenos Aires, 1945.

[102] J. Rey Pastor and J. Babini. *Historia de la Matemática*. Espasa - Calpe Argentina, S. A., Buenos Aires, 1951.

[103] J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, and C. Trejo. *Análisis Matemático*. Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 1952-60.

[104] Patricio O'Donnell and Jorge H. Pazo. *Lateralización de las funciones cerebrales*, chapter IX, 21, pages IX, 320. Volume 4 of Cingolani and Houssay [39], 6ª edition, 1994.

[105] Roger Penrose. *La nueva mente del emperador*. Mondadori España, S. A., Madrid, España, 1991.

[106] Roger Penrose. *Shadows of the Mind*. Vintage, Random House, London, 1995.

[107] Jean Perrin. *Los principios de la química física*. Espasa-Calpe, S.A., Buenos Aires, 1948.

[108] Plutarque. *Les vies des hommes illustres*. Humblot, Paris, 1778.

[109] Karl R. Popper. The propensitiy interpretation of the calculus of probability, and the quantum theory. In S. Körner, editor, *Observation and Interpretation*, pages 65–70, London. Butterworths Scientific Publications.

[110] Karl R. Popper. *La sociedad abierta y sus enemigos*. Planeta-Agostini, Barcelona, 1992.

[111] Karl R. Popper. *The logic of scientific discovery*. Routledge, London New York, 1995.

[112] Willard van Orman Quine. *Mathematical logic*. Harvard University Press, 1951.

[113] Willard van Orman Quine. *El sentido de la nueva lógica*. Editorial Nueva Visión, Buenos Aires, 1958.

[114] Willard van Orman Quine. *Paradoja*, page 224. Editorial Blume, Madrid, 1974.

[115] Willard van Orman Quine. *Desde un punto de vista lógico*. Hispamérica Ediciones Argentina, S. A., Buenos Aires, 1985.

[116] Willard van Orman Quine. *Los métodos de la lógica*. Planeta-Agostini, Barcelona, 1986.

[117] György E. Révész. *Introduction to formal languages*. Dover Publications, Inc., New York, 1991.

[118] Marcelo B. Ribeiro and Antonio A. P. Videira. Dogmatism and theoretical pluralism in modern cosmology. Preprint physics/9806011, 1998.

[119] G. Romero, S. Pérez Bergliaffa, and H. Vucetich. Steps towards an axiomatic pregeometry of space-time. 1998.

[120] H. J. Rose. *A Handbook of Greek Mithology*. Dutton, New York, 1959.

[121] Paul Rosenbloom. *The elements of mathematical logic*. Dover Publications, Inc., New York, 1950.

[122] Bertrand Russell. *Los principios de la matemática*. Espasa-Calpe Argentina, S. A., Buenos Aires - México, 1948.

[123] Bertrand Russell. *Por qué no soy cristiano*. Editrial Hermes, México, Buenos Aires, 1962.

[124] Bertrand Russell. *Historia de la filosofía occidental*. Espasa-Calpe, S. A., Madrid, 1978.

[125] Bertrand Russell. *El conocimiento humano: su alcance y sus límites.* Planeta-Agostini, Barcelona, 1992.

[126] Jorge Pecci Saavedra and María L. F. de Matiello. *Sentidos especiales*, chapter IX, 8. Volume 4 of Cingolani and Houssay [39], 6ª edition, 1994.

[127] Arto Salomaa. *Formal Languajes.* Academic Press, Boston, 1973.

[128] Willam Shakespeare. *The complete works.* Collins, London, 1954. Edited by Peter Alexander.

[129] Willam Shakespeare. *Romeo and Juliet*, page 902. In [128], 1954. II, ii, 43–44.

[130] Lawerence B. Slobodkin. *Crecimiento y regulación de las poblaciones animales.* EUDEBA, Buenos Aires, 1966.

[131] Sófocles. *Dramas y Tragedias.* Editorial Iberia, Barcelona, 1976.

[132] A. Sommerfeld. *Electromagnetism.* Academic Press, New York, 1952.

[133] Alfred Tarski. *The concept of truth in formalized languages*, page 152. In [134], 1956.

[134] Alfred Tarski. *Logic, Semantics and Metamathematics.* Oxford University Press, London, 1956.

[135] Alfred Tarski. *Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas.* Espasa-Calpe, S. A., Madrid, 1968.

[136] W. J. Thron. *Topological Structures.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[137] J. S. Toll. Causality and the dispersion relation: Logical foundations. *Phys. Rev*, 104:1760, 1956.

[138] Stephen Toulmin and June Goodfield. *The Fabric of the Heavens.* Harper and Row, New York, 1965.

[139] Stephen Toulmin and June Goodfield. *The Architecture of Matter.* Harper and Row, New York, 1966.

[140] Stephen Toulmin and June Goodfield. *The Discovery of Time.* Harper and Row, New York, 1966.

[141] J. von Neumann. *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica.* Instituto de Matemáticas "Jorge Juan", Madrid, 1949.

[142] S. Weinberg. *Relativity and Gravitation.* Wiley, New York, 1972.

[143] Ludwig Wittgenstein. *Tractatus Logico-Philosophicus.* Ediciones Altayar, S. A., Barcelona, 1994.

[144] Marc Zamanski. *Introducción al Álgebra y Análisis Moderno.* Montaner y Simon, S. A., Barcelona, 1970.